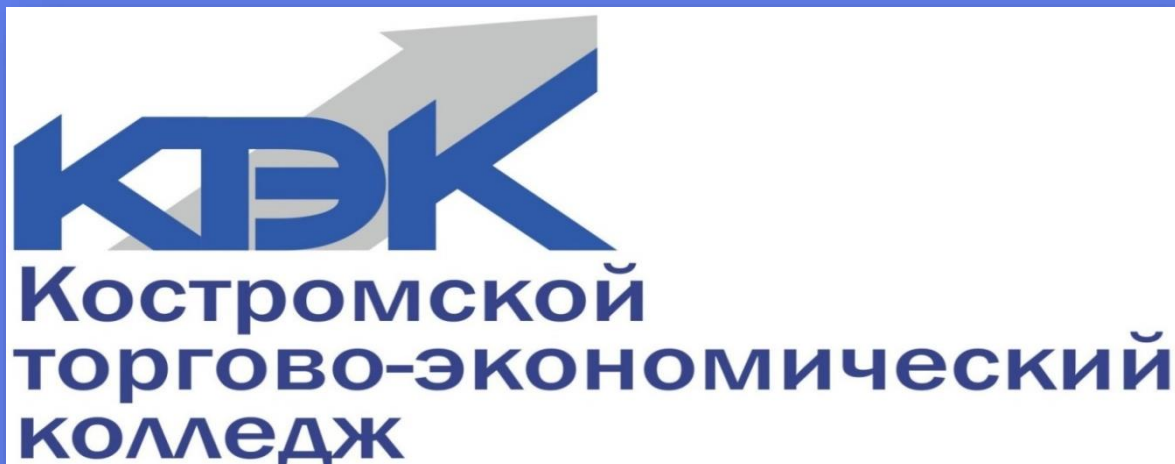




**Региональный методический конкурс педагогических
работников образовательных организаций Костромской
области**

**Номинация: Дидактические материалы для
обучающихся**

МАТЕМАТИКА.

Сборник прикладных задач.

**Автор: Холинова О.А. – преподаватель ОГБПОУ «Костромской торгово-
экономический колледж»**

Кострома, 2023

Рассмотрен и одобрен на заседании ЦМК
общеобразовательных дисциплин
Протокол № 6 от «27» января 2023 г.

Рекомендован к применению
Заседание методического совета
Протокол № 6 от «28» февраля 2023 г.

Холинова О.А. Математика. Сборник прикладных задач. – Кострома: ОГБПОУ «Костромской торгово-экономический колледж», 2023. – 77 с.

Сборник задач составлен в соответствии с ФГОС, рабочими программами курса ЕН.01 Математика для подготовки студентов средних профессиональных образовательных организаций, обучающихся по программам подготовки специалистов среднего звена. Содержит прикладные задачи по следующим разделам: элементы линейной алгебры - матрицы, системы линейных уравнений; дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной; основы теории вероятностей. Сборник предназначен для студентов вторых курсов средних профессиональных образовательных организаций, обучающихся по специальностям Коммерция (по отраслям), Товароведение и экспертиза качества потребительских товаров, Экономика и бухгалтерский учёт (по отраслям). В сборнике подробно разобрано решение задач с профессиональным содержанием.

© ОГБПОУ «Костромской торгово-экономический колледж», 2023

© Холинова О.А., 2023

Содержание

Пояснительная записка.....	4
1. Элементы линейной алгебры.....	8
1.1. Матрицы. Действия над матрицами.....	8
1.2. Системы линейных алгебраических уравнений.....	19
2. Производная функции.....	37
2.1. Механический смысл производной.....	37
2.2. Производная в биологии.....	41
2.3. Химический смысл производной.....	42
2.4. Экономический смысл производной.....	42
3. Определённый интеграл.....	49
3.1. Экономический смысл определённого интеграла.....	49
3.2. Физический смысл определённого интеграла.....	52
4. Основы теории вероятностей.....	55
4.1. Теоремы сложения и умножения вероятностей.....	55
4.2. Формула полной вероятности. Формула Байеса.....	60
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	73
Список используемых источников.....	75

Пояснительная записка

*Рано или поздно всякая правильная математическая идея находила
применение в том или ином деле.*

Крылов А.Н.

Настоящий сборник прикладных задач включает избранные разделы математики, которые рассматриваются на втором курсе обучения по программам подготовки специалистов среднего звена. Сюда относятся линейная алгебра, основы дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной, основы теории вероятностей. Сборник прикладных задач составлен в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования (далее – ФГОС СПО).

Для современного образования важно формирование и развитие успешной личности, уверенно адаптирующейся к изменениям окружающего мира, а также готовой к труду и дальнейшему самообразованию.

В соответствии с концепцией развития математического образования в Российской Федерации, утверждённой распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р, изучение математики играет системообразующую роль в образовании, развивая познавательные способности человека, в том числе к логическому мышлению, влияя на преподавание других дисциплин. Качественное математическое образование необходимо каждому для его успешной жизни в современном обществе. Система профессионального образования должна обеспечивать необходимый уровень математической подготовки кадров для нужд математической науки, экономики, научно-технического прогресса, безопасности, медицины и т.д. Студентам необходимо решать задачи элементарной математики в зоне своего ближайшего развития, в существенно большем объёме, чем сегодня [5].

Обучение математике в учреждениях среднего профессионального образования (далее – СПО) позволяет студенту, во-первых, получить фундаментальную математическую подготовку в соответствии с программой, а во-вторых, овладеть навыками математического моделирования в области будущей профессиональной деятельности.

Преподавание математики в учреждениях СПО тесно связано с изучением специальных дисциплин: будущие специалисты постоянно сталкиваются с потребностью в тех или иных математических знаниях. Поэтому математику следует рассматривать как важнейшую составляющую качественной подготовки специалистов. Это обусловлено не только тем, что математика является важным элементом общей культуры, универсальным языком науки, в целом, но и, главным образом, тем, что она является мощным средством решения прикладных задач. Одним из мотивов, стимулирующих интерес к изучению того или иного вопроса курса математики, является его практическая и профессиональная значимость. А этого можно добиться, используя практико-ориентированные задачи при обучении.

Усиление практической направленности преподавания – одна из основных задач, поставленных перед системой профессионального образования. В соответствии с требованиями ФГОС, вся система обучения математики в СПО должна показывать практическое значение математической науки, учить студентов применять теоретические знания для решения конкретных вопросов и задач, с которыми они столкнутся в процессе обучения выбранной специальности.

При изучении каждого раздела курса ЕН.01 Математика в большинстве учебных пособий, задачников рассматриваются типовые примеры по изучаемым темам, а задачи прикладного характера, связанные с получаемой специальностью, отсутствуют. Преподавателю приходится подбирать нужный материал в дополнительных источниках. Чаще всего учебный материал преподносится студентам как определенная сумма знаний без «увязывания» его

с профессиональной деятельностью. В то же время небольшое число аудиторных занятий не позволяет в полной мере продемонстрировать возможности математики в решении задач прикладного характера. Поэтому возникла идея создания сборника прикладных задач по избранным разделам математики, составленного на основе собственного опыта работы.

Целью создания сборника является разработка современных дидактических материалов нового поколения, которые предполагают использование дифференцированного подхода к обучению студентов с различным уровнем математической подготовки; приобщение студентов к грамотному и обоснованному решению задач с профессиональным содержанием, традиционно относящихся к курсам линейной алгебры, математического анализа и теории вероятностей.

В сборнике приведены задачи по темам: матрицы и действия над ними; системы линейных алгебраических уравнений; метод Гаусса; метод Крамера; физический смысл производной; экономический смысл производной; экономический смысл определённого интеграла; физический смысл определённого интеграла; теоремы сложения и умножения вероятностей; формула полной вероятности; формула Байеса.

Практико-ориентированное обучение направленно на развитие познавательных потребностей, функционирования мышления, организацию поиска новых знаний, повышению эффективности образовательного процесса, формирование практического опыта и использования его при решении жизненно важных задач и проблем. Решение прикладных задач позволяет формировать у студентов такие общие компетенции как: понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес; организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество; принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность; осуществлять поиск и использование информации,

необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития; использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности; работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

Опыт преподавания в колледже показывает, что целенаправленное внедрение в практику обучения прикладных задач ведёт к повышению качества математических знаний, повышению уровня обучаемости, мотивации к изучению математики, то есть формирует профессиональную компетентность.

В результате изучения обязательной части учебного цикла обучающийся должен:

уметь:

решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

знать:

значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;

основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;

основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории вероятностей и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления [1, 2, 3, 4].

Задачник может быть использован как для закрепления пройденного материала, овладения способами и методами решения задач, практических занятий под руководством преподавателя, так и для самостоятельной работы, а также для целей самообразования. Сборник задач может оказаться полезным также и преподавателям при подготовке к занятиям, составлении контрольных и экзаменационных работ.

1. Элементы линейной алгебры.

1.1. Матрицы. Действия над матрицами.

Задача 1. Три предприятия выпускают 3 вида продукции.

Необходимо:

а) Найти матрицу выпуска продукции за квартал, если заданы матрицы помесечных выпусков.

б) Найти матрицы прироста выпуска продукции за каждый месяц и проанализировать результаты.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 12 & 11 & 7 \\ 8 & 6 & 15 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 11 & 16 & 9 \\ 15 & 17 & 5 \\ 8 & 19 & 21 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 13 & 17 & 10 \\ 19 & 20 & 13 \\ 6 & 21 & 18 \end{pmatrix}$$

Решение:

а) матрица продукции за квартал находится как сложение матриц:

$$A_1 + A_2 + A_3 = \begin{pmatrix} 5 + 11 + 13 & 8 + 16 + 17 & 9 + 9 + 10 \\ 12 + 15 + 19 & 11 + 17 + 20 & 7 + 5 + 13 \\ 8 + 8 + 6 & 6 + 19 + 21 & 15 + 21 + 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 41 & 28 \\ 46 & 48 & 25 \\ 22 & 46 & 54 \end{pmatrix}$$
$$A_4 = \begin{pmatrix} 29 & 41 & 28 \\ 46 & 48 & 25 \\ 22 & 46 & 54 \end{pmatrix}.$$

б) Найдем матрицы прироста выпуска продукции за каждый месяц.

$$B_1 = A_2 - A_1 = \begin{pmatrix} 11 & 16 & 9 \\ 15 & 17 & 5 \\ 8 & 19 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 12 & 11 & 7 \\ 8 & 6 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 - 5 & 16 - 8 & 9 - 9 \\ 15 - 12 & 17 - 11 & 5 - 7 \\ 8 - 8 & 19 - 6 & 21 - 15 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \\ 0 & 13 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = A_3 - A_2 = \begin{pmatrix} 13 & 17 & 10 \\ 19 & 20 & 13 \\ 6 & 21 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 16 & 9 \\ 15 & 17 & 5 \\ 8 & 19 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 - 11 & 17 - 16 & 10 - 9 \\ 19 - 15 & 20 - 17 & 13 - 5 \\ 6 - 8 & 21 - 19 & 18 - 21 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Выводы:

По полученным данным (матрица B_1) видим, что во втором месяце по сравнению с первым:

- ✓ на первом предприятии выпуск продукции 1 вида увеличился на 6 единиц, 2 вида увеличился на 8 единиц, 3 вида – остался неизменным.
- ✓ во втором предприятии выпуск продукции 1 вида увеличился на 3, 2 вида увеличился на 6 единиц, 3 вида уменьшился на 3 единицы.
- ✓ на третьем предприятии выпуск продукции 1 вида остался неизменным, 2 вида увеличился на 13 единиц, 3 вида увеличился на 6 единиц.

По аналогии можно сделать вывод по матрице B_2 .

Задача 2. Данные о производстве обуви трёх видов – ботинки, кроссовки, сапоги (в условных единицах) на двух фабриках за 2019 и 2020 годы приведены в виде матриц. Найдите: **а)** объём произведённой продукции за два года; **б)** прирост объёмов производства в 2020 году по сравнению с 2019 годом по видам обуви на двух фабриках; **в)** матрицу среднегодового производства обуви. Поясните экономический смысл элементов полученных матриц.

$$A_{2019} = \begin{pmatrix} 2145 & 654 & 547 \\ 1853 & 418 & 540 \end{pmatrix}, A_{2020} = \begin{pmatrix} 2241 & 654 & 468 \\ 1859 & 384 & 562 \end{pmatrix}$$

Решение:

а) Найдём объём произведённой продукции за два года, для этого складываем матрицы.

$$\begin{aligned} V = A_{2019} + A_{2020} &= \begin{pmatrix} 2145 & 654 & 547 \\ 1853 & 418 & 540 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2241 & 654 & 468 \\ 1859 & 384 & 562 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2145 + 2241 & 654 + 654 & 547 + 468 \\ 1853 + 1859 & 418 + 384 & 540 + 562 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4386 & 1308 & 1015 \\ 3712 & 802 & 1102 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Поясним экономический смысл полученной матрицы.

Объемы продукции на первой фабрике составили 4386 пар ботинок, 1308 пар кроссовок, 1015 пар сапог. Объемы продукции на второй фабрике составили 3712 пар ботинок, 802 пары кроссовок, 1102 пары сапог.

б) Прирост объемов производства в 2020 году по сравнению с 2019 годом определяется разностью матриц:

$$P = A_{2020} - A_{2019} = \begin{pmatrix} 2241 & 654 & 468 \\ 1859 & 384 & 562 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2145 & 654 & 547 \\ 1853 & 418 & 540 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2241 - 2145 & 654 - 654 & 468 - 547 \\ 1859 - 1853 & 384 - 418 & 562 - 540 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 & 0 & -79 \\ 6 & -34 & 22 \end{pmatrix}$$

Отрицательные элементы полученной матрицы показывают, что на данной фабрике объем производства продукта уменьшился, положительные – увеличился, нулевые – не изменился.

в) Матрицу среднегодового производства обуви найдем как среднее арифметическое матриц A_{2019} и A_{2020} :

$$S = \frac{1}{2}(A_{2019} + A_{2020}) = \frac{1}{2}V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4386 & 1308 & 1015 \\ 3712 & 802 & 1102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2193 & 654 & 507,5 \\ 1856 & 401 & 551 \end{pmatrix}$$

Поясним экономический смысл элементов полученной матрицы. Среднегодовое производство обуви на первой фабрике составляет: ботинки – 2193 пары, кроссовки – 654 пары, сапоги 507,5 пар. На второй фабрике среднегодовое производство обуви составляет: 1856 пар ботинок, 401 пара кроссовок, 551 пара сапог.

Задача 3. В таблице указано количество единиц продукции, отгружаемой ежедневно на молокозаводах 1 и 2 магазины M_1 , M_2 и M_3 , причем доставка единицы продукции с каждого молокозавода в магазин M_1 стоит 50 ден. Ед., в магазин M_2 – 70, а в M_3 – 130 ден. Ед. Подсчитать ежедневные транспортные расходы каждого завода.

Таблица 1

Молокозавод	Магазины		
	M_1	M_2	M_3
№1	20	35	10
№2	15	27	8

Решение:

Обозначим через А-матрицу количества единиц продукции, В-матрицу характеризующую стоимость доставки единицы продукции в магазины, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 35 & 10 \\ 15 & 27 & 8 \end{pmatrix}, B = (50 \quad 70 \quad 130)$$

тогда матрица затрат на перевозки будет иметь вид:

$$A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 20 & 35 & 10 \\ 15 & 27 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \cdot 50 + 35 \cdot 70 + 10 \cdot 130 \\ 15 \cdot 50 + 27 \cdot 70 + 8 \cdot 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4750 \\ 3680 \end{pmatrix}$$

Транспонируем матрицу В, т.к. в противном случае нельзя было бы вычислить произведение матриц. Итак, первый завод ежедневно тратит на перевозки 4750 ден. Ед., второй – 3680 ден. Ед.

Задача 4. Мороженщица, торгующая в кинотеатре, перед утренним сеансом продала 36 порций пломбира; 8 порций в стаканчиках ; 10 порций в брикетах, 7 порций в трубочках и 11 порций в рожках; перед дневным сеансов - 62 порции; соответственно 16,15,13 и 18. Наибольший спрос пришелся на вечер -101 порция: 25,21,31,24 соответственно. Определим утреннюю, дневную и вечернюю выручку продаж при цене 3 руб. за порцию пломбира в стаканчиках, 1,5 руб. за порцию в брикетах, 2 руб. за порцию в трубочках и 2,5 руб. за порцию в рожках.

Решение.

Для решения задачи найдем произведение матрицы объемов продаж на матрицу стоимости каждого вида мороженого:

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 & 7 & 11 \\ 10 & 15 & 13 & 18 \\ 25 & 21 & 31 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 3 + 10 \cdot 1,5 + 7 \cdot 2 + 11 \cdot 2,5 \\ 10 \cdot 3 + 15 \cdot 1,5 + 13 \cdot 2 + 18 \cdot 2,5 \\ 25 \cdot 3 + 21 \cdot 1,5 + 31 \cdot 2 + 24 \cdot 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80,5 \\ 141,5 \\ 228,5 \end{pmatrix}$$

Ответ: 80, 5 руб. утренняя выручка; 141,5 руб. дневная выручка; 228,5 руб. вечерняя выручка.

Задача 5. Швейное предприятие производит зимние пальто, демисезонные пальто и плащи. Плановый выпуск за декаду характеризуется матрицей $X = (10, 15, 23)$. Используя ткани четырех типов T_1, T_2, T_3 и T_4 . В таблицу два приведены нормы расхода ткани (в метрах) на каждое изделие. Матрица $C = (40, 35, 24, 16)$ задает стоимость метра ткани каждого типа а матрица $P = (5, 3, 2, 2)$ - стоимость перевозки метра ткани каждого вида.

Таблица 2

Изделие	Расход ткани			
	T_1	T_2	T_3	T_4
Зимнее пальто	5	1	0	3
Демисезонное пальто	3	2	0	2
Плащ	0	0	4	3

1. Сколько метров ткани каждого типа потребуется для выполнения плана?
2. Найти стоимость ткани, расходуемой на пошив изделия каждого вида?

Решение.

Обозначим через A матрицу данную нам в условии, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Тогда для нахождения количества метров ткани необходимо для выполнения плана, нужно матрицу X умножить на матрицу A:

$$(10 \quad 15 \quad 23) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (95 \quad 40 \quad 92 \quad 129)$$

Стоимость ткани, расходуемой на пошив изделия каждого вида, найдем, перемножив матрицу A и транспонированную матрицу C^T

$$A \cdot C^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ 24 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 40 + 1 \cdot 35 + 0 \cdot 24 + 3 \cdot 16 \\ 3 \cdot 40 + 2 \cdot 35 + 0 \cdot 24 + 2 \cdot 16 \\ 0 \cdot 40 + 0 \cdot 35 + 4 \cdot 24 + 3 \cdot 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 283 \\ 222 \\ 114 \end{pmatrix}$$

Задача 6. Два предприятия производят коляски, велосипеды и самокаты. Количество продукции каждого вида, производимые за месяц, приведены в таблице 3.

Таблица 3

Предприятие	Количество продукции (шт)		
	Коляски	Велосипеды	Самокаты
I предприятие	112	335	217
II предприятие	210	165	382

Данные о прибыли (в условных денежных единицах) от реализации единицы каждого вида изделий в каждый из трех месяцев приведены в таблице 4.

Таблица 4

Продукция	Прибыль (усл.ден.ед.)		
	Апрель	Май	Июнь
Коляски	43,2	67,2	55,3
Велосипеды	54,1	89,7	70,5
Самокаты	45,4	50,4	55,5

Составить матрицу прибыли каждого предприятия в каждый из трёх месяцев. Поясните экономический смысл.

Решение.

Составляем матрицы $A = \begin{pmatrix} 112 & 335 & 217 \\ 210 & 165 & 382 \end{pmatrix}$ - матрица количества продукции каждого вида, производимые за месяц каждым предприятием, и $B = \begin{pmatrix} 43,2 & 67,2 & 55,3 \\ 54,1 & 89,7 & 70,5 \\ 45,4 & 50,4 & 55,5 \end{pmatrix}$ – матрица прибыли от реализации единицы каждого вида продукции в разные месяцы.

Матрицу прибыли каждого предприятия в любой из рассматриваемых месяцев находим как произведение матриц A и B .

$$P = A \cdot B = \begin{pmatrix} 112 & 335 & 217 \\ 210 & 165 & 382 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 43,2 & 67,2 & 55,3 \\ 54,1 & 89,7 & 70,5 \\ 45,4 & 50,4 & 55,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34766,7 & 48512,7 & 41854,6 \\ 38779,3 & 48165,3 & 44446,5 \end{pmatrix}$$

Прибыль первого предприятия за реализацию колясок составит 34766,7 условных денежных единиц, за реализацию велосипедов 48512,7 условных денежных единиц, за реализацию самокатов 41854,6 условных денежных единиц. По второму предприятию соответствующие прибыли равны 38779,3; 48165,3; 44446,5 условных денежных единиц.

Задача 7. План по выпуску предприятием выпускает трех типов мягких игрушек составляет 1020 единиц собак, 1545 единиц кошек и 1270 единиц мишек. Для их изготовления используется пять видов сырья. Расход сырья, а также стоимость единицы каждого вида сырья (в условных денежных единицах) указаны в таблице 5.

Найти:

- а) необходимое количество каждого вида сырья для обеспечения плана;
- б) стоимость сырья для единицы каждого вида продукции;
- в) общую стоимость всего сырья для всей продукции.

Таблица 5

Типы игрушек	Типы сырья				
	I	II	III	IV	V
Собаки	5	10	3	9	2
Кошки	4	8	5	6	8
Медведи	6	12	4	3	10
Стоимость единицы сырья	7	4	5	10	2

Решение.

Составим матрицу $X = (1020 \ 1545 \ 1270)$, характеризующую план предприятия;

матрицу $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 3 & 9 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & 12 & 4 & 3 & 10 \end{pmatrix}$, характеризующую расход сырья на

единицу продукции;

матрицу $C = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$ – стоимость единицы каждого вида сырья (в условных

денежных единицах).

а) Необходимое количество каждого вида сырья для обеспечения плана находят как произведение матрицы X на матрицу A :

$$\begin{aligned}
 B = X \cdot A &= (1020 \ 1545 \ 1270) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 10 & 3 & 9 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & 12 & 4 & 3 & 10 \end{pmatrix} \\
 &= (18900 \ 37800 \ 15865 \ 22260 \ 27100)
 \end{aligned}$$

Вывод: первого вида сырья необходимо 18900 у.е, второго – 37800 у.е., третьего – 15865 у.е., четвертого – 22260 у.е. и пятого вида сырья – 27100 у.е.

б) Стоимость сырья для единицы каждого вида продукции

$$D = A \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 3 & 9 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & 12 & 4 & 3 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 184 \\ 161 \\ 160 \end{pmatrix}$$

Вывод: для производства одной собаки необходимо 184 условных денежных единиц, одной кошки – 161 условных денежных единиц и одного медведя – 160 условных денежных единиц.

в) Общую стоимость всего сырья для всей продукции находим как произведение матрицы, характеризующей план и матрицы, характеризующей стоимость сырья для единицы каждого вида продукции:

$$Q = X \cdot D = (1020 \quad 1545 \quad 1270) \cdot \begin{pmatrix} 184 \\ 161 \\ 160 \end{pmatrix} = (639625)$$

Вывод: для выполнения плана необходимо 639625 условных денежных единиц.

Задача 8. В городе имеются ателье индивидуального пошива женского легкого платья 1, 2, 3-го разрядов. Каждое ателье изготавливает 4 вида изделий:

юбки, платья, блузки, брюки. Матрица расценок (в условных денежных единицах) имеет вид $D = \begin{pmatrix} 12 & 35 & 21 & 17 \\ 15 & 39 & 25 & 23 \\ 21 & 51 & 29 & 27 \end{pmatrix}$. Количество изделий,

изготовленных каждым видом ателье за прошлый месяц, задано матрицей $P = \begin{pmatrix} 48 & 31 & 39 & 28 \\ 28 & 24 & 20 & 26 \\ 32 & 33 & 43 & 30 \\ 16 & 15 & 14 & 20 \end{pmatrix}$. Найдите выручку за прошлый месяц для каждого ателье.

Решение.

Найдём матрицу выручки ателье за месяц как произведение матрицы расценок на матрицу выпущенной продукции.

$$T = D \cdot P = \begin{pmatrix} 12 & 35 & 21 & 17 \\ 15 & 39 & 25 & 23 \\ 21 & 51 & 29 & 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 48 & 31 & 39 & 28 \\ 28 & 24 & 20 & 26 \\ 32 & 33 & 43 & 30 \\ 16 & 15 & 14 & 20 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2500 & 23160 & 2351 & 2216 \\ 2980 & 2571 & 2812 & 2644 \\ 3796 & 3237 & 3522 & 3324 \end{pmatrix}$$

Вывод: тогда выручка ателье первого разряда составляет $2500+2160+2351+2216=9227$ условных денежных единиц, выручка ателье второго разряда составляет $2980+2571+2812+2644=11007$ условных денежных единиц, выручка ателье третьего разряда составляет $3796+3237+3522+3324=13879$ условных денежных единиц.

Задача 9.

Расход сырья (в условных единицах) тремя предприятиями указан в таблице 6, а стоимость перевозок (в условных денежных единицах) – в таблице 7. Найти затраты на перевозку сырья каждым предприятием по видам транспорта используют два вида сырья: уголь и древесину.

Таблица 6

Предприятия	Тип сырья	
	Уголь	Древесина
I	10	20
II	50	0
III	30	10

Таблица 7

Тип сырья	Тип транспорта		
	Автомобильный	Железнодорожный	Водный

Уголь	3051	5723	8119
Древесина	7120	2672	8119

Решение.

По таблице 6 составляем матрицу расхода сырья $X = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 50 & 0 \\ 30 & 10 \end{pmatrix}$. По таблице 7 составляем матрицу стоимостей перевозок $P = \begin{pmatrix} 3051 & 5723 & 8119 \\ 7120 & 2672 & 8119 \end{pmatrix}$.

Находим матрицу затрат по видам транспорта:

$$\begin{aligned}
 Y = X \cdot P &= \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 50 & 0 \\ 30 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3051 & 5723 & 8119 \\ 7120 & 2672 & 8119 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 172910 & 110670 & 243570 \\ 152550 & 286150 & 405950 \\ 162730 & 198410 & 324760 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Выводы:

Итак, первому предприятию необходимо затратить на перевозку сырья автомобильным транспортом 172910 условных денежных единиц, железнодорожным транспортом – 110670 условных денежных единиц, водным транспортом – 243570 условных денежных единиц.

Второму предприятию необходимо затратить на перевозку сырья автомобильным транспортом 152550 условных денежных единиц, железнодорожным транспортом – 286150 условных денежных единиц, водным транспортом – 405950 условных денежных единиц.

Третьему предприятию необходимо затратить на перевозку сырья автомобильным транспортом 162730 условных денежных единиц, железнодорожным транспортом – 198410 условных денежных единиц, водным транспортом – 324760 условных денежных единиц.

1.2. Системы линейных алгебраических уравнений.

Задача 10.

Для отделки мягкой мебели предприятие закупило 50 метров ткани первого и 60 метров ткани второго и 40 метров ткани третьего вида. Стоимость покупки составила 21000 денежных единиц. Найти стоимость одного метра каждой ткани, если 40 метров первого вида ткани стоит столько же, сколько 60 метров второго вида, а 20 метров ткани третьего вида на 300 денежных единиц дешевле 30 метров ткани первого вида.

Решение.

Пусть x_1 , x_2 и x_3 денежных единиц – стоимость 1 метра ткани соответственно первого, второго и третьего вида. В соответствии с условием задачи составим три уравнения:

$$50x_1 + 60x_2 + 40x_3 = 21000,$$

$$40x_1 - 60x_2 = 0,$$

$$30x_1 - 20x_3 = 300$$

Данные условия выполняются одновременно, поэтому получаем систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 50x_1 + 60x_2 + 40x_3 = 21000, \\ 40x_1 - 60x_2 = 0, \\ 30x_1 - 20x_3 = 300. \end{cases}$$

Найдем решение данной системы.

Составим определитель матрицы системы и найдем его по правилу треугольника.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 50 & 60 & 40 \\ 40 & -60 & 0 \\ 30 & 0 & -20 \end{vmatrix} \\ &= 50 \cdot (-60) \cdot (-20) + 60 \cdot 0 \cdot 30 + 40 \cdot 40 \cdot 0 - 40 \cdot (-60) \cdot 30 - 60 \cdot 40 \cdot (-20) - 50 \cdot 0 \cdot 0 = 60000 + 0 + 0 + 72000 + 48000 - 0 = 180000 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 21000 & 60 & 40 \\ 0 & -60 & 0 \\ 300 & 0 & -20 \end{vmatrix}$$

$$= 21000 \cdot (-60) \cdot (-20) + 60 \cdot 0 \cdot 300 + 40 \cdot 0 \cdot 0 - 40 \cdot (-60) \cdot 300 - 60 \cdot 0 \cdot (-20) - 21000 \cdot 0 \cdot 0 = 25920000$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 50 & 21000 & 40 \\ 40 & 0 & 0 \\ 30 & 300 & -20 \end{vmatrix}$$

$$= 50 \cdot 0 \cdot (-20) + 21000 \cdot 0 \cdot 30 + 40 \cdot 300 \cdot 40 - 40 \cdot 0 \cdot 30 - 21000 \cdot 40 \cdot (-20) - 0 \cdot 300 \cdot 50 = 17280000$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 50 & 60 & 21000 \\ 40 & -60 & 0 \\ 30 & 0 & 300 \end{vmatrix}$$

$$= 50 \cdot (-60) \cdot 300 + 40 \cdot 0 \cdot 21000 + 60 \cdot 0 \cdot 30 - 30 \cdot (-60) \cdot 21000 - 60 \cdot 40 \cdot 300 - 50 \cdot 0 \cdot 0 = 36180000$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{25920000}{180000} = 144$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{17280000}{180000} = 96$$

$$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{36180000}{180000} = 201$$

Ответ: стоимость одного метра ткани первого вида — 144 денежных единицы, второго вида — 96 денежных единиц, а третьего — 201 денежная единица.

Задача 11.

Фирма продает сухофрукты - курагу по 86 денежных единиц за килограмм и чернослив по 131 денежных единиц за килограмм. Так как спрос на чернослив был меньше, экономист фирмы предложил смешать два вида сухофруктов в некоторой пропорции и продать смесь по 111 денежных единиц за килограмм. Сколько килограммов кураги надо смешать с 20 кг чернослива, чтобы общая выручка не изменилась?

Решение.

Пусть x_1 — количество килограммов кураги в смеси, x_2 - общее количество смеси. Так как смесь составлена из x_1 кг кураги и 20 кг чернослива, то составим уравнение $x_2 = x_1 + 20$.

Чтобы выручка не изменилась, должно выполняться равенство:

(количество кураги)*(цена 1кг кураги) + (количество чернослива)* (цена 1 кг чернослива) = (количество смеси) * (цена 1кг смеси)

$$86 \cdot x_1 + 131 \cdot 20 = 111 \cdot x_2$$

Получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -20, \\ 86 \cdot x_1 - 111 \cdot x_2 = -2620. \end{cases}$$

Составим и найдём определитель матрицы системы (состоящий из коэффициентов при неизвестных):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 86 & -111 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-111) - 86 \cdot (-1) = -25 \neq 0.$$

Определитель матрицы отличен от нуля, следовательно решение системы существует и оно единственно. Решим систему по формулам Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$.

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -20 & -1 \\ -2620 & -111 \end{vmatrix} = (-20) \cdot (-111) - (-1) \cdot (-2620) = 2220 - 2620 = -400$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & -20 \\ 86 & -2620 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2620) - (-20) \cdot 86 = -2620 + 1720 = -900$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-400}{-25} = 16, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-900}{-25} = 36.$$

Ответ: 20 кг кураги надо смешать с 16 кг чернослива.

Задача 12.

Строительной фирме для отделки помещений было выделено 2888 условных денежных единиц для покупки 20 банок краски темно-бирюзового, бирюзового и светло-бирюзового оттенков по цене 120, 148 и 200 денежных

единиц за банку соответственно. Однако на момент покупки краски выяснилось, что на краску темно-бирюзового и светло-бирюзового оттенков в результате скидок цены уменьшились на 5 и 7 процентов соответственно. После покупки краски от выделенной суммы осталось 116 условных денежных единиц. Выяснить, какое количество банок каждой краски купили.

Решение.

Пусть x_1 , x_2 и x_3 - количество приобретенных банок краски темно-бирюзового, бирюзового и светло-бирюзового оттенков соответственно.

Всего куплено банок $x_1 + x_2 + x_3 = 20$.

По условию задачи планировалось произвести покупку по ценам без скидок $120x_1 + 148x_2 + 200x_3 = 2888$.

В результате приобрели краски на сумму 3200 условных денежных единиц по ценам $0,95 * 120 = 114$ и $0,93 * 200 = 186$ на краску темно-бирюзового и светло-бирюзового оттенков соответственно.

Получим третье условие задачи: $114x_1 + 148x_2 + 186x_3 = 2772$.

В результате имеем систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 20, \\ 120x_1 + 148x_2 + 200x_3 = 2888, \\ 114x_1 + 148x_2 + 186x_3 = 2772. \end{cases}$$

Решим данную систему методом Гаусса.

Запишем расширенную матрицу системы, затем выполним её преобразования и приведём к треугольному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 120 & 148 & 200 & 2888 \\ 114 & 148 & 186 & 2772 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -28 & -80 & -488 \\ 0 & -34 & -72 & -492 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -28 & -80 & -488 \\ 0 & 0 & -704 & -2816 \end{array} \right)$$

1 шаг.

Первую строку перепишем без изменений.

Первую строку умножим на 120 и вычтем вторую строку. Результат запишем во вторую строку.

Первую строку умножим на 114 и вычтем третью строку. Результат запишем в третью строку.

2 шаг.

Первые две строки перепишем без изменений. Вторую строку умножим на 34 и вычтем третью строку, умноженную на 28. Результат запишем в третью строку.

Мы свели матрицу к треугольному виду. Запишем равносильную систему линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_2 = 20, \\ -28x_2 - 80x_3 = -488, \\ -704x_3 = -2816. \end{cases}$$

Найдём переменные.

$$-704x_3 = -2816 \Rightarrow x_3 = 4$$

$$-20x_2 - 320 = -488 \Rightarrow x_2 = 6$$

$$x_1 + 6 + 4 = 20 \Rightarrow x_1 = 10$$

Таким образом, количество приобретенных банок краски темно-бирюзового, бирюзового и светло-бирюзового оттенков соответственно равно 10, 6 и 4.

Задача 13.

При выполнении плана товарооборота магазин должен продать товары трех видов в количествах a_{11} , a_{12} , a_{13} (тыс. штук) соответственно. Если продавать эти товары в количествах a_{21} , a_{22} , a_{23} (тыс. штук) соответственно, то план товарооборота будет перевыполнен в полтора раза. Если же товары продать в количествах a_{31} , a_{32} , a_{33} (тыс. штук) соответственно, то выполнение плана составит лишь 75%.

Постройте математическую модель задачи и определите стоимость единицы товара каждого вида, если план товарооборота составляет Q тыс. руб.

План товарооборота магазина Q (тыс. руб.) и значения a_{ij} (в виде матрицы) даны ниже.

$$Q = 16, A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Составим математическую модель задачи.

Таблица 8

	Вид товара			План товарооборота, в %	План товарооборота, в единицах
	1 вид	2 вид	3 вид		
Количество товара	2	5	1	100%	16
	5	1	1	150%	24
	2	1	1	75%	12
Стоимость товара	?	?	?		

Для начала необходимо узнать, сколько составляет 150%.

$$\frac{150 \cdot 16}{100} = \frac{2400}{100} = \mathbf{24}.$$

Теперь точно также найдём 75%.

$$\frac{75 \cdot 16}{100} = \frac{1200}{100} = \mathbf{12}.$$

Запишем данные результаты в таблицу.

Пусть x_1 – стоимость единицы товара 1 вида.

x_2 – стоимость единицы товара 2 вида.

x_3 – стоимость единицы товара 3 вида.

Составим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 16, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 24, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 12. \end{cases}$$

Решим данную систему методом Гаусса.

Запишем расширенную матрицу системы, затем выполним её преобразования и приведём к треугольному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 16 \\ 5 & 1 & 1 & 24 \\ 2 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 16 \\ 0 & 23 & 3 & 32 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 16 \\ 0 & 3 & 23 & 32 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

1 шаг.

Первую строку перепишем без изменений.

Первую строку умножим на 5 и вычтем вторую строку, умноженную на 2. Результат запишем во вторую строку.

2 шаг.

Поменяем местами 2-ой и 3-ий столбец.

Мы свели матрицу к треугольному виду. Запишем равносильную систему линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 5x_2 = 16, \\ 3x_3 + 23x_2 = 32, \\ 4x_2 = 4. \end{cases}$$

Найдём переменные.

$$4x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 1$$

$$3x_3 + 23 = 32 \Rightarrow 3x_3 = 9 \Rightarrow x_3 = 3$$

$$2x_1 + 3 + 5 \cdot 1 = 16 \Rightarrow x_1 = 4$$

Следовательно, 4 ус. ед. – стоимость товара 1 вида; 1 ус. ед. – стоимость единицы товара 2 вида и 3 ус. ед. – стоимость единицы товара 3 вида.

Ответ: (4; 1; 3).

Задача 14.

Обувная фабрика специализируется по выпуску изделий трёх видов: сапог, кроссовок и ботинок; при этом используется сырьё трёх типов. Нормы расхода каждого из них на одну пару обуви и объём расхода сырья на 1 день заданы таблицей. Найти ежедневный объём выпуска каждого вида обуви.

Составить математическую модель задачи и решить её одним из методов линейной алгебры.

Таблица 9

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одну пару, усл.ед.			Расход сырья на 1 день, усл.ед.
	Сапоги	Кроссовки	Ботинки	
S ₁	5	3	4	2700
S ₂	2	1	1	800
S ₃	3	2	2	1600
Объём выпуска	x	y	z	

Решение.

Обозначим за x — объём выпуска сапог;

y — объём выпуска кроссовок;

z — объём выпуска ботинок.

Составим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 2700, \\ 2x + y + z = 800, \\ 3x + 2y + 2z = 1600. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы, затем выполним её преобразования и приведём к треугольному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 2700 \\ 2 & 1 & 1 & 800 \\ 3 & 2 & 2 & 1600 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 2700 \\ 0 & 1 & 3 & 1400 \\ 0 & -1 & 2 & 100 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 2700 \\ 0 & 1 & 3 & 1400 \\ 0 & 0 & 5 & 1500 \end{array}\right)$$

Шаг 1.

Первую строку переписываем без изменений. Первую строку умножаем на 2 и вычитаем вторую строку, умноженную на 5. Результат записываем во вторую строку.

Первую строку умножаем на 3 и вычитаем третью строку, умноженную на 5. Результат записываем в третью строку.

Шаг 2.

Первую и вторую строки переписываем без изменений.

Ко второй строке прибавляем третью и результат записываем в третью строку.

Мы свели матрицу к треугольному виду. Запишем равносильную систему линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 2700, \\ y + 3z = 1400, \\ 5z = 1500. \end{cases}$$

Найдём переменные.

$$z = 300$$

$$y = 500$$

$$x = 0$$

Таким образом, 0 пар объём выпуска сапог, 500 пар - кроссовок; 300 пар - ботинок.

Ответ: (0; 500; 300).

Задача 15.

Прогноз выпуска продукции по запасам сырья. Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех типов. Необходимые характеристики производства указаны в таблице 10. Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья. Задачи такого рода типичны для прогнозов и оценок функционирования предприятий, экспертных оценок проектов освоения месторождений полезных ископаемых, а также для планирования микроэкономики предприятий.

Таблица 10

Вид сырья	Расход сырья по видам продукции			Запас сырья
	1	2	3	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

Решение.

Обозначим неизвестные объемы выпуска продукции через x , y и z . Тогда при условии полного расхода запасов для каждого вида сырья можно записать балансовые соотношения, которые образуют систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 6x + 4y + 5z = 2400, \\ 4x + 3y + z = 1450, \\ 5x + 2y + 3z = 1550. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -21$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2400 & 4 & 5 \\ 1450 & 3 & 1 \\ 1550 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3150$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 6 & 2400 & 5 \\ 4 & 1450 & 1 \\ 5 & 1550 & 3 \end{vmatrix} = -5250$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 2400 \\ 4 & 3 & 1450 \\ 5 & 2 & 1550 \end{vmatrix} = -2100$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-3150}{-21} = 150; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-5250}{-21} = 250; z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-2100}{-21} = 100$$

Решая эту систему уравнений по формулам Крамера, находим, что при заданных запасах сырья объемы выпуска продукции составят по каждому виду соответственно (в условных единицах)

$$x = 150, y = 250, z = 100.$$

Задача 16.

Пекарня специализируется по выпуску изделий трех видов: хлебобулочные изделия, пироги и торты. При этом используется сырье трех типов: S1, S2, S3. Нормы расхода каждого из них на одну единицу изделия и общий объем расхода сырья за 1 день заданы таблицей 11:

Таблица 11

Вид сырья	Расход сырья по видам продукции, вес, ед./изм.			Запас сырья, вес, ед.
	Хлебобулочные	Пироги	Торты	
1	5	3	4	2700
2	2	1	1	900
3	3	2	2	1600

Найти ежедневный объем выпуска каждого вида продукции.

Решение.

Обозначим неизвестные объема выпуска продукции г/з x , y , z . Тогда при условиях полного расхода запасов для каждого вида сырья можно записать соотношения, которые образуют систему 3 уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 2700, \\ 2x + y + z = 900, \\ 3x + 2y + 2z = 1600. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2700 & 3 & 4 \\ 900 & 1 & 1 \\ 1600 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -200$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 2700 & 4 \\ 2 & 900 & 1 \\ 3 & 1600 & 3 \end{vmatrix} = -300$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2700 \\ 2 & 1 & 900 \\ 3 & 2 & 1600 \end{vmatrix} = -200$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-200}{-1} = 200; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-300}{-1} = 300; z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-200}{-1} = 200$$

Ответ: при заданных запасах сырья объем выпуска продукции составляет по каждому виду 200,300,200 у.е соответственно.

Задача 17.

Предприятие выпускает продукцию трех видов: босоножки, балетки, и ботильоны, используется сырье P_1, P_2, P_3 . Нормы расхода на одну пару обуви и объем расхода сырья на 1 день заданы таблицей 12. Найти ежедневный объем выпуска каждого вида обуви.

Таблица 12

Тип сырья	Расход сырья на 1 день усл.ед.			Норма расхода на 1 пару обуви, усл.ед.
	Ботильоны	Босоножки	Балетки	
P_1	3	5	5	1200
P_2	2	3	3	800
P_3	1	2	1	300

Решение.

Пусть предприятие ежедневно выпускает X пар обуви, где x_1 пар ботильонов, x_2 пар босоножек, x_3 пар балеток.

Составим СЛУ в соответствии с данными таблицы:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1200, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 800, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 300. \end{cases}$$

Применяя элементы линейной алгебры, можно решить указанную выше СЛУ следующими методами: матричным методом, методом Гаусса, методом Крамера.

Рассмотрим лишь два метода решения СЛУ: а) метод Крамера, б) метод Гаусса.

А. Решение СЛУ методом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20 + 15 + 9 - 10 - 15 - 18 = -1 \neq 0, \quad \text{следовательно,}$$

существует решение системы и при том только одно.

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1200 & 3 & 5 \\ 800 & 2 & 3 \\ 300 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4800 + 4000 + 2700 - 3000 - 3600 - 4800 = 100,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 5 & 1200 & 5 \\ 3 & 800 & 3 \\ 1 & 300 & 2 \end{vmatrix} = 8000 + 4500 + 3600 - 4500 - 7200 - 4000 = 400$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1200 \\ 3 & 2 & 800 \\ 1 & 1 & 300 \end{vmatrix} = 3000 + 3600 + 2400 - 2400 - 4000 - 2700 = -100.$$

Вычислим значения x_1, x_2, x_3 .

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{100}{-1} = -100, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{400}{-1} = -400, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-100}{-1} = 100.$$

Таким образом получаем ответ $(-100; -400; 100)$.

Б. Решение СЛУ методом Гаусса.

Составим из СЛУ расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 5 & 1200 \\ 3 & 2 & 3 & 800 \\ 1 & 1 & 2 & 300 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 5 & 1200 \\ 0 & -1 & 0 & -400 \\ 0 & -2 & -5 & -300 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 5 & 1200 \\ 0 & -1 & 0 & -400 \\ 0 & 0 & 5 & -500 \end{array} \right)$$

Шаг 1.

Первую строку переписываем без изменений. Первую строку умножаем на 3 и вычитаем вторую строку, умноженную на 5. Результат записываем во вторую строку.

Из первой строки вычитаем третью строку, умноженную на 5. Результат записываем в третью строку.

Шаг 2.

Первую и вторую строки переписываем без изменений.

Вторую строку умножаем на 2 и вычитаем третью строку, результат записываем в третью строку.

Мы свели матрицу к треугольному виду. Запишем равносильную систему линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1200, \\ -x_2 = -400, \\ 5x_3 = -500. \end{cases}$$

Найдём переменные.

$$x_1 = -100, x_2 = 400, x_3 = 100$$

Ответ: предприятие ежедневно может выпускать определенное количество пар: 100 ботильонов, 400 босоножек и -100 балеток.

Задача 18.

В первом полугодии предприятие вложило в производство изделий трех видов 13 млн. д.е. и получило 710 тыс. д.е. прибыли. Во втором полугодии планируется увеличить затраты на производство изделий первого и третьего видов в 2 и 3 раза соответственно, а затраты на производство изделий второго вида оставить на прежнем уровне. На это предполагается затратить 20 млн. д.е. Какую прибыль получит предприятие во втором полугодии, если изделия

первого и второго видов дают 5% прибыли на вложенные средства, а изделия третьего вида – 8%?

Решение.

Пусть x – вложения в производство изделий 1го вида; y – вложения в производство изделий второго вида; z – вложения в производство изделий третьего вида.

По условию задачи получаем систему:

$$\begin{cases} x + y + z = 13, \\ 2x + y + 3z = 20, \\ 0,05x + 0,05y + 0,08z = 0,71. \end{cases}$$

которая эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} x + y + z = 13, \\ 2x + y + 3z = 20, \\ 5x + 5y + 8z = 71. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 10 + 15 - 5 - 15 - 16 = -3$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & 1 & 1 \\ 20 & 1 & 3 \\ 71 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 104 + 100 + 213 - 71 - 195 - 160 = -9$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 13 & 1 \\ 2 & 20 & 3 \\ 5 & 71 & 8 \end{vmatrix} = 160 + 142 + 195 - 100 - 213 - 208 = -24$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 13 \\ 2 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 71 \end{vmatrix} = 71 + 130 + 100 - 65 - 100 - 142 = -6$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-9}{-3} = 3; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-24}{-3} = 8; z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2$$

Таким образом, вложения в производство изделий 1, 2, 3 видов в первом полугодии составили 3, 8, 2 млн. д.е. соответственно. Во втором полугодии аналогичные затраты составят 6, 8, 6 млн. д.е. Найдем общую прибыль, ожидаемую во втором полугодии:

$$P = 6 \cdot 0,05 + 8 \cdot 0,05 + 6 \cdot 0,08 = 1,18 \text{ (млн.д.е.)}.$$

Ответ: предприятие получит прибыль 1,18 млн. д.е.

Задача 19.

Из некоторого листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа А, 300 заготовок типа Б и 675 заготовок типа В. При этом можно применять три способа раскроя. При первом способе раскроя получается 3 заготовки типа А, 1 заготовка типа Б и 4 заготовки типа В, при втором способе раскроя получается 2 заготовки типа А, 6 заготовок типа Б и 1 заготовка типа В, при третьем способе раскроя получается 1 заготовка типа А, 2 заготовки типа Б и 5 заготовок типа В. Найти расход материала при каждом из указанных способов раскроя.

Таблица 13

Тип заготовки	Количество заготовок по способам раскроя			Необходимое количество заготовок
	I способ	II способ	III способ	
А	3	2	1	360
Б	2	6	2	300
В	4	1	5	675

Решение.

Обозначим через x , y , z количество листов материала, раскраиваемых соответственно первым, вторым и третьим способами. Используя данные таблицы запишем систему:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 360, \\ x + 6y + 2z = 300, \\ 4x + y + 5z = 675. \end{cases}$$

Система уравнений – это математическая модель условия выполнения всего задания по заготовкам А, Б и В.

Решить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными можно любым известным методом (матричным, Крамера, Гаусса).

Матрица системы квадратная, если ее определитель не равен нулю, то данную систему можно решить методом Крамера.

Вычислим определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 90 + 1 + 16 - 24 - 6 - 10 = 67 \neq 0,$$

следовательно, существует решение системы и при том только одно.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 360 & 2 & 1 \\ 300 & 6 & 2 \\ 675 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 10800 + 300 + 2700 - 4050 - 720 - 3000 = 6030,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 360 & 1 \\ 1 & 300 & 2 \\ 4 & 675 & 5 \end{vmatrix} = 4500 + 675 + 2880 - 1200 - 4050 - 1800 = 1005$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 360 \\ 1 & 6 & 300 \\ 4 & 1 & 675 \end{vmatrix} = 12150 + 360 + 2400 - 8640 - 900 - 1350 = 4020.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{6030}{67} = 90; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1005}{67} = 15; z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{4020}{67} = 60$$

Ответ: будет израсходовано 90 листов материала при первом способе раскроя, 15 листов материала при втором способе раскроя и 60 листов материала при третьем способе раскроя.

Задача 20.

Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года $3/8$ вклада, который составляет 800 тыс. руб., вложили в первый банк, $1/8$ во второй банк и оставшуюся часть вклада в третий банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 907 тыс. руб. Если бы первоначально $1/8$ вклада положили в первый банк, $4/8$ вклада — во второй банк, оставшуюся часть вклада — в третий банк, то к концу года сумма этих вкладов стала бы равна 894 тыс. руб. Если бы $4/8$ вклада вложили в первый банк, $3/8$ вклада — во второй банк, оставшуюся часть вклада — в третий банк, то к концу года сумма этих вкладов была бы равна 903 тыс. руб. Какой процент начисляет каждый банк?

Решение.

Введем следующие обозначения:

x_1 — процент, начисляемый вкладчику в первом банке;

x_2 — процент, начисляемый вкладчику во втором банке;

x_3 — процент, начисляемый вкладчику в третьем банке.

Вклад в первый банк составил $\frac{3}{8} \times 800 = 300$ тыс. руб.

Вклад во второй банк составил $\frac{1}{8} \times 800 = 100$ тыс.руб.

Вклад в третий банк составил $\frac{4}{8} \times 800 = 400$ тыс. руб.

Начислено в первом банке за год $300 \cdot \frac{x_1}{100} = 3x_1$ тыс. руб.

Начислено во втором банке за год $100 \cdot \frac{x_2}{100} = x_2$ тыс. руб.

Начислено в третьем банке за год $400 \cdot \frac{x_3}{100} = 4x_3$ тыс. руб.

Всего на вклад в 800 тыс. руб., сделанный в три банка (в первый — 300 тыс. руб., во второй — 100 тыс. руб., в третий — 400 тыс. руб.), было начислено за год: $907 - 800 = 107$ тыс. руб.

Таким образом, первое уравнение системы:

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 = 107$$

Аналогично получим два других уравнения системы

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 894 - 800 = 94,$$

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 903 - 800 = 103$$

Получим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 107, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 94, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 103. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса.

Выпишем расширенную матрицу A данной системы и приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 4 & 107 \\ 1 & 4 & 3 & 94 \\ 4 & 3 & 1 & 103 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 4 & 107 \\ 0 & -11 & -5 & -175 \\ 0 & -5 & 13 & 119 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 4 & 107 \\ 0 & -11 & -5 & -175 \\ 0 & 0 & -168 & -2184 \end{array}\right)$$

Шаг 1.

Первую строку переписываем без изменений. Из первой строки вычитаем вторую строку, умноженную на 3. Результат записываем во вторую строку.

Первую строку умножаем на 4 и вычитаем третью строку, умноженную на 3. Результат записываем в третью строку.

Шаг 2.

Первую и вторую строки переписываем без изменений.

Вторую строку умножаем на 5 и вычитаем третью строку, умноженную на 11 и результат записываем в третью строку.

Мы свели матрицу к треугольному виду. Запишем равносильную систему линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 107, \\ -11x_2 - 5x_3 = -175, \\ -168x_3 = -2184. \end{cases}$$

Найдём переменные.

$$x_1 = 15, x_2 = 10, x_3 = 13.$$

Ответ: первый банк выплачивает 15% годовых, второй банк — 10% годовых, а третий банк — 13% годовых.

2. Производная функции.

2.1. Механический смысл производной.

Задача 1. Тело движется прямолинейно, его расстояние от начала отсчёта изменяется по закону $s(t) = 3t^3 - 4t + 5$ (м). Определить *мгновенную скорость тела* через 2 секунды после начала движения.

Решение.

Найдём производную функции $V_{\text{мгн}} = s'(t) = (3t^3 - 4t + 5)' = 9t^2 - 4$.

Подставим значение $t = 2$.

$9 \cdot 2^2 - 4 = 9 \cdot 4 - 4 = 36 - 4 = 32$ м/с – это мгновенная скорость (то есть скорость в момент времени).

Ответ: 32 м/с.

Задача 2. Материальная точка движется по закону $x(t) = t^3 - 5t^2 + 6t + 7$. *Через сколько секунд* после начала движения *ускорение* точки будет *равно 8* м/с²?

Решение.

Найдём производную первого порядка

$V_{\text{мгн}} = x'(t) = (t^3 - 5t^2 + 6t + 7)' = 3t^2 - 10t + 6$ м/с (уравнение скорости).

Необходимо выразить ускорение формулой. Согласно следствию из механического смысла производной, ускорение – это вторая производная пути по времени.

Найдём вторую производную от пути (или производную скорости).

$a = x''(t) = (V_{\text{мгн}})' = (3t^2 - 10t + 6)' = 6t - 10$ м/с² уравнение ускорения

По условию задачи сказано, что $a = 8$ м/с²

$$6t - 10 = 8$$

$$6t = 18$$

$$t = 3$$

Ответ: 3 с.

Задача 3. Прямолинейное движение материальной точки задано уравнением $s(t) = t^3 - 16t^2 - 91t + 1456$. Найти момент времени t_0 , когда материальная *точка остановится*.

Решение.

Материальная точка остановится, то есть её скорость станет равной нулю. Значит нам необходимо найти производную пути и приравнять её к нулю:

$$s(t) = t^3 - 16t^2 - 91t + 1456$$

$$V = 3t^2 - 32t - 91 \text{ м/с}$$

$$3t^2 - 32t - 91 = 0$$

$$D = (-32)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-91) = 2116$$

$$t_1 = \frac{32 + 46}{6} = 13$$

$$t_1 = \frac{32 - 46}{6} = -\frac{14}{6}$$

$-\frac{14}{6}$ — не удовлетворяет условию задачи, т.к. время не может быть отрицательным числом.

Ответ: 13 с.

Задача 4.

Тело массой 8 кг движется прямолинейно по закону $S = 2t^2 + 3t - 1$. Найдите кинетическую энергию тела через 3 с после начала движения.

Решение.

$$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Найдём скорость движения тела $v = (2t^2 + 3t - 1)' = 4t + 3$

Вычислим скорость тела в момент времени $t = 3$.

$$v(t = 3) = 4 \cdot 3 + 3 = 15 \text{ м/с}$$

Определим кинетическую энергию тела в момент времени $t = 3$.

$$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{8 \cdot 15^2}{2} = 900 \text{ Дж}$$

Ответ: 900 Дж

Задача 5.

Количество электричества, протекающее через проводник, начиная с момента времени $t = 0$, задаётся формулой $Q = 3t^2 - 3t + 4$. Найдите силу тока в конце шестой секунды.

Решение.

Сила тока есть производная количества электричества по времени. Следовательно, нужно найти производную функции $Q = 3t^2 - 3t + 4$ и вычислить её значение при $t = 6$.

$$I = Q' = (3t^2 - 3t + 4)' = 6t - 3$$

$$I(t = 6) = 6 \cdot 6 - 3 = 33$$

Ответ: 33 А

Задача 6.

Количество теплоты Q , получаемое некоторым веществом при нагревании его от 0 до T , определяется по формуле $Q = 0,1054t + 0,000002t^2$ (Q - в джоулях, t - в кельвинах). Найдите теплоёмкость этого вещества при 100 К.

Решение.

Находим теплоёмкость $C = Q' = 0,1054 + 0,000004t$

$$C(100) = 0,1054 + 0,000004 \cdot 100 = 0,1058$$

Ответ: 0,1058 Дж/К.

Задача 7.

Маховик за время t поворачивается на угол $\varphi = 8t - 0,5t^2$ (t — в секундах, φ — в радианах). Определите угловую скорость ω в конце третьей секунды. Найдите момент, когда прекратиться вращение.

Решение.

$$\varphi' = (8t - 0,5t^2)' = 8 - t \text{ (рад/с)}$$

$$\omega(t = 3) = 8 - 3 = 5 \text{ (рад/с)}$$

Вращение прекратиться в момент, когда $\omega = 8 - t = 0, t = 8$ с.

Ответ: 5 рад/с; 8 с.

2.2. Производная в биологии

Задача 8.

Пусть популяция бактерий в момент t (с) насчитывает $x(t)$ особей. $x(t) = 3000 + 100t^2$. Найти скорость роста популяции в момент $t = 1$ с.

Решение.

$$P = (3000 + 100t^2)' = 200t$$

$$P(t = 1) = 200$$

Ответ: 200.

Задача 9.

Пусть популяция бактерий в момент времени t насчитывает $x(t) = 3000 + 100t^2$ особей. В какой момент времени скорость роста популяции будет равна 600 особей в секунду?

Решение.

$$x' = (3000 + 100t^2)' = 200t$$

$$200t = 600$$

$$t = 3$$

Ответ: 3 с.

2.3. Химический смысл производной

Задача 10.

Пусть количество вещества, вступившего в химическую реакцию задаётся формулой $p(t) = \frac{t^2}{2} + 3t - 3$ (моль). Найдите скорость химической реакции через 7 секунд.

Решение.

$$V = \left(\frac{t^2}{2} + 3t - 3 \right)' = t + 3$$

$$V(t = 7) = 7 + 3 = 10$$

Ответ: 10 моль/с.

Задача 11.

Зависимость между массой вещества M , полученной в некоторой химической реакции и временем t выражена уравнением $M = 5t^2 + 6t$. Найдите скорость реакции в момент времени 20 секунд.

Решение.

$$M' = (5t^2 + 6t)' = 10t + 6$$

$$M'(t = 20) = 10 \cdot 20 + 6 = 206$$

Ответ: 206 г/с.

2.4. Экономический смысл производной.

Задача 12. Функция спроса имеет вид $QD = 100 - 20p$, постоянные издержки TFC составляют 50 денежных единиц, а переменные издержки TVC на производство единицы продукции – 2 денежные единицы. Найти объём выпуска, максимизирующий прибыль монополиста.

Решение.

Прибыль есть выручка минус издержки:

$$\Pi = TR - TC, \quad \text{где } TR = p \cdot Q; \quad TC = TFC + TVC.$$

$$\text{Найдём цену единицы продукции:} \quad 20p = 100 - Q \quad p = 5 - Q/20.$$

$$\text{Тогда} \quad \Pi = (5 - Q/20) Q - (50 + 2Q) = -Q^2 + 60Q - 1000 \max$$

$$\text{Найдём производную: } \Pi'(Q) = -2Q + 60.$$

$$\text{Приравняем производную к нулю: } -2Q + 60 = 0 \quad Q = 30.$$

При переходе через точку $Q=30$ функция $\Pi(Q)$ меняет свой знак с плюса на минус, следовательно, эта точка является точкой максимума, и в ней функция прибыли достигает своего максимального значения. Таким образом, объём выпуска, максимизирующий прибыль, равен 30 единицам продукции.

Ответ: 30.

Задача 13. Найти объём производства, при котором фирма, действующая на рынке совершенной конкуренции, будет получать максимальную прибыль, если $p=15$, $TC(q) = q^3 + 3q$.

Решение.

Прибыль фирмы, действующей на рынке совершенной конкуренции, максимизируется при равенстве предельной выручки и предельных издержек: $MR=MC$. Поскольку при совершенной конкуренции наблюдается равенство цены и предельной выручки: $P=MR$, то можно утверждать, что фирма максимизирует прибыль при $P=MC$.

$$\text{Найдём предельные издержки: } MC = TC' = 3q^2 + 3.$$

$$3q^2 + 3 = 15; \quad 3q^2 = 12 \quad q = 2.$$

Итак, мы выяснили, что при цене $p = 15$ фирма предложит на продажу 2 единицы продукции.

Ответ: 2.

Задача 14. Объём спроса на продукцию предприятия выражается формулой: $Q_D = 200 - 4p$, а объём предложения $-Q_S = 6p - 100$. Величина переменных издержек на единицу продукции $TVC = 25$. Чему должна быть равна цена на единицу продукции p , чтобы прибыль Π была максимальной?

Решение.

В точке потребительского равновесия $Q_S = Q_D$, то есть $6p_0 - 100 = 200 - 4p_0$, откуда $p_0 = 30$ (ден.ед.) – равновесная цена, $Q_0 = 80$ (ед.) – равновесный объём продукции.

Рассмотрим три возможных варианта:

1) $p > p_0$, $Q = Q_D$ то есть $\Pi = Q_D p - Q_D TVC = Q_D(p - TVC)$,

подставим значения и получим:

$$\Pi = (200 - 4p) \cdot (p - 25) = -4p^2 + 300p - 5000.$$

2) $p = p_0$, $Q = Q_D = Q_S$, $Q_{\text{продажи}} = Q_0 = 80$ (ед.),

$$\Pi_2 = 80 \cdot (30 - 25) = 400 \text{ (ден. ед.)}.$$

3) $p < p_0$: $Q = Q_S$, то есть $\Pi = Q_S p - Q_S TVC = Q_S p - TVC$,

подставим значения:

$$\Pi = (6p - 100)(p - 25) = 6p^2 - 250p + 2500.$$

Далее случаи (1) и (3) можно решать аналитически, подставляя различные значения цены из интервала её значений или как-либо иначе, гораздо проще выявить экстремумы прибыли через производную:

1) $\Pi = -4p^2 + 300p - 5000$

$$\Pi' = -8p + 300;$$

$$-8p + 300 = 0 \quad p = 75/2 = 37,5 \text{ (ден. ед.)}.$$

Значит, $Q=Q_D=200 - 4 \cdot 37,5=200 - 150=50$ (ед.), а

$$\Pi_1 = -4p^2 + 300p - 5000 = -4 \cdot (37,5)^2 + 300 \cdot 37,5 - 5000 = 625 \text{ (ден. ед.)}.$$

2) Во втором случае прибыль была уже найдена: $\Pi_2=400$ (ден. ед.).

$$3) \Pi = 6p^2 - 250p + 2500$$

$$\Pi' = 12p - 250;$$

$$12p - 250 = 0 \quad p = 125/6 = 20\frac{5}{6} \text{ (ден. ед.)}.$$

Значит, $Q=Q_S=6 \cdot 20\frac{5}{6} - 100 = 125 - 100 = 25$ (ед.), а

$$\Pi_3 = 6p^2 - 250p + 2500 = 6 \cdot (20\frac{5}{6})^2 - 250 \cdot 20\frac{5}{6} + 2500 = -104\frac{1}{6} \text{ (ден. ед.)}.$$

Можно заключить, что прибыль максимальна в первом случае, следовательно, цена единицы продукции должна равняться 37,5 денежным единицам.

Задача 15. Найти максимум прибыли монополиста, если известно, что спрос на его продукцию описывается функцией: $Q = 165 - 0,5 \times P$ и функцией общих затрат равна: $TC = 5500 + 30 \times Q + Q^2$

Решение.

Условия максимизации прибыли на монопольном рынке состоит в равенстве предельных издержек и предельного дохода:

$$MC = MR$$

Предельные издержки определим по форме

$$MC = TC' = (5500 + 30 \times Q + Q^2)' = 30 + 2Q$$

Найдём обратную функцию спроса:

$$Q = 165 - 0,5 \times P \rightarrow P = 330 - 2 \times Q$$

Функция общего дохода будет иметь вид:

$$TR = P \times Q = (330 - 2Q) Q = 330Q - 2Q^2$$

Предельный доход рассчитаем по формуле:

$$MR = TR' = (330Q - 2Q^2)' = 330 - 4Q$$

$$30 + 2Q = 330 - 4Q$$

$$6Q = 300$$

$Q = 50$ – оптимальный выпуск фирмы.

Цена продукции этом будет равна:

$$P = 330 - 2 \times 50 = 230.$$

Рассчитаем прибыль монополиста по формуле:

$$\Pi = TR - TC = P \times Q - (5500 + 30Q + Q^2)$$

$$\Pi = 230 \times 50 - 5500 - 30 \times 50 - 50^2 = 2000.$$

Задача 16. Цементный завод производит X т. цемента в день. По договору он должен ежедневно поставлять строительной фирме не менее 20 т. цемента. Производственные мощности завода таковы, что выпуск цемента не может превышать 90 т. в день.

Определить, при каком объеме производства удельные затраты будут наибольшими (наименьшими), если функция затрат имеет вид:

$$K = -x^3 + 98x^2 + 200x.$$

$$\text{Удельные затраты составят } Y = \frac{K}{x} = -x^2 + 98x + 200$$

Наша задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значения функции $Y = -x^2 + 98x + 200$. На промежутке $[20; 90]$.

$$\text{Найдём критическую точку } Y' = -2x + 98 = 0$$

Вывод: $x = 49$, критическая точка функции. Вычисляем значение функции на концах промежутках и в критической точке.

$$Y(20)=1760 \quad Y(49)=2601 \quad Y(90)=320$$

Таким образом, при выпуске 49 тонн цемента в день удельные издержки максимальны, это экономически не выгодно, а при выпуске 90 тонн в день минимально, следовательно, можно посоветовать работать заводу на предельной мощности и находить возможности усовершенствовать технологию, так как дальше будет действовать закон убывающей доходности. И без реконструкции нельзя будет увеличить выпуск продукции.

Задача 17. Предприятие производит X единиц некоторой однородной продукции в месяц. Установлено, что зависимость финансовых накопления предприятия от объема выпуска выражается формулой $f(x) = -0,02x^3 + 600x - 1000$. Исследовать потенциал предприятия.

Функция исследуется с помощью производной.

$$f'(x) = -0,06x^2 + 600 = 0$$

Получаем, что при $X=100$ функция достигает максимума.

Вывод: финансовые накопления предприятия растут с увеличением объема производства до 100 единиц, при $x=100$ они достигают максимума и объем накопления равен 39000 денежных единиц. Дальнейший рост производства приводит к сокращению финансовых накоплений.

Задача 18.

Объем продукции, произведенной цехом, может быть описан уравнением: $u(t) = -t^3 + 5t^2 + 120t + 10$, где $1 \leq t \leq 8$ — рабочее время (ч). Вычислите производительность труда и скорость ее изменения в момент $t=1$ и $t=4$.

Решение.

Производительность труда найдем по формуле:

$$z(t) = u'(t) = -3t^2 + 10t + 120 \text{ (ед./ч)}.$$

Скорость изменения производительности труда вычислим как производную: $z'(t) = -6t + 10 \text{ (ед./ч}^2\text{)}$

Тогда в заданные моменты времени имеем:

$$z(1) = 128 \text{ (ед./ч}^2\text{)},$$

$$z'(1) = 4 \text{ (ед./ч}^2\text{)};$$

$$z(4) = 112 \text{ (ед./ч}^2\text{)},$$

$$z'(4) = -14 \text{ (ед./ч}^2\text{)}$$

Можно сделать вывод, что производительность труда к концу рабочего дня снижается. При этом изменение знака в $z'(t)$ свидетельствует о том, что увеличение производительности труда в первые часы рабочего дня смещаются ее снижением в последующие часы.

Задача 19.

Оборот предприятия за истекший год описывается через функцию $U(t) = 0,15t^2 - 2t^3 + 200$, где t – месяцы, U – миллионы. Исследуйте оборот предприятия.

Решение.

Исследуем оборот предприятия с помощью производной:

$$U'(t) = 0,3t - 6t^2$$

$$U''(t) = 0,3 - 12t$$

$$U'''(t) = -12.$$

Момент наименьшего оборота при $U'(t) = 0$, т.е. при $t = 8,3$.

Наименьший оборот был на девятом месяце.

Первая производная показывает экстремальное изменение оборота.

Из $U'(t) = 0$ следует $t = 8,3$.

Так как $U'''(t) < 0$, то на пятом месяце имеется сильное снижение оборота.

Точки перегиба важны в экономике, так как именно по ним можно определить, в какой конкретно момент произошло изменение.

Можно сделать выводы: в начале исследуемого периода у предприятия было снижение оборота; предприятие пыталось выйти из этого состояния и для этого использовало определенные средства. На пятом месяце (точка перегиба) что-то было предпринято и предприятие стало выходить из кризиса, а на девятом месяце стало набирать обороты.

Задача 20.

Известна функция затрат производства $y = 30x - 0,01x^3$ (у.е.). Найдите предельные затраты, если объём выпускаемой продукции равен 20 ед.

Решение.

Предельные затраты производства равны производной:

$$y' = (30x - 0,01x^3)' = 30 - 0,03x^2.$$

При заданном объёме выпускаемой продукции

$$x = 20 \text{ ед.}, y'(20) = 30 - 0,03 \cdot 20 = 30 - 12 = 18 \text{ (у.е.)}.$$

Таким образом, предельные затраты на производство дополнительной единицы продукции при заданном объёме выпускаемой продукции 20 ед. будут равны 18.

3. Определённый интеграл.

3.1. Экономический смысл определённого интеграла.

Задача 1. Известно, что спрос на некоторый товар задается функцией $p = 4 - q^2$, где q – количество товара (в шт.), p – цена единицы товара (в руб.), а равновесие на рынке данного товара достигается при $p^* = q^* = 1$. Определите величину потребительского излишка.

Решение.

$$\begin{aligned} CS &= \int_0^{q^*} f(q) dq - p^* \cdot q^* = \int_0^1 (4 - q^2) dq - 1 \cdot 1 = \left(4q - \frac{q^3}{3} \right) \Big|_0^1 - 1 = \\ &= 4 - \frac{1}{3} - 1 = 2\frac{2}{3} \text{ (руб.)} \end{aligned}$$

Задача 2. Задана функция предельных издержек (издержки на производство дополнительной выпускаемой единицы продукции товара) $C = 2q^2 - 14q + 250$. Найти функцию издержек $C = C(q)$ и вычислить издержки в случае производства 15 единиц товара.

Решение.

Находим интегрированием издержек на изготовление 15 ед. товара.

$$C = \int_0^{15} (2q^2 - 14q + 250) dq = \frac{2}{3}q^3 - \frac{14}{2}q^2 + 250q \Big|_0^{15} = 4425 \text{ (у.е.)}$$

Задача 3. Найти объем произведенной продукции за время $t = 6$ час, если производительность труда задана функцией $f(t) = -t^2 + 10t$ (ед/час).

Решение.

$$Q = \int_0^T f(t) dt = \int_0^6 (-t^2 + 10t) dt = \left(-\frac{t^3}{3} + \frac{10t^2}{2}\right) \Big|_0^6 = 108 \text{ (y.e.)}$$

Задача 4. Найти дневную выработку Q за рабочий день продолжительностью 8 часов, если производительность труда в течение дня изменяется по формуле:

$$f(t) = -0,2t^2 + 1,6t + 3, \text{ где } t - \text{ время в часах.}$$

Провести экономический анализ.

Решение. Дневную выработку найдем по формуле.

$$Q = \int_0^8 (-0,2t^2 + 1,6t + 3) dt = F(t) \Big|_0^8 = \left(-\frac{0,2}{3}t^3 + 0,8t^2 + 3t\right) \Big|_0^8 = 41,06 \text{ (y.e.)}$$

Задача 5. Определить выработку рабочего:

- а) за весь рабочий день;
- б) за третий час работы;
- в) за последний час работы, если продолжительность рабочего дня 6 часов, а $f(t) = -3t^2 + 18t$ — производительность труда;
- г) провести экономический анализ задачи.

Решение. Находим общую выработку рабочего за весь день (6 часов) по формуле.

а) $Q = \int_0^6 (-3t^2 + 18t) dt = \left(-\frac{3t^3}{3} + 18\frac{t^2}{2}\right) \Big|_0^6 = (-t^3 + 9t^2) \Big|_0^6 = (-216 + 324) = 108 \text{ (y.e.)}$

б) $Q = \int_2^3 (-3t^2 + 18t) dt = (-t^3 + 9t^2) \Big|_2^3 = 26 \text{ (y.e.)}$

в) $Q = \int_5^6 (-3t^2 + 18t) dt = (-t^3 + 9t^2) \Big|_5^6 = 8 \text{ (y.e.)}$

г) За полный рабочий день выработка составила 108 у.е. продукции. За третий час работы 26 у.е., за последний час 8 у.е.. Под конец смены производительность падает, потому что рабочие устали, т.к. сложная работа и требует много усилий.

Задача 6. Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1 = 50$ до $x_2 = 75$ изделий, если функция изменения затрат времени $t = 100x^{-\frac{1}{2}}$ (ч).

Решение.

$$t_{cp} = \frac{1}{75 - 50} \int_{50}^{75} 100x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{100}{25} \int_{50}^{75} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 8\sqrt{x} \Big|_{50}^{75} \approx 11,2(\text{ч})$$

Задача 8. Инвестор намерен непрерывно вкладывать средства в развитие фирмы по производству мебели в течение трех лет, в соответствии с зависимостью $I(t) = 10(1 + t)$, где $I(t)$ – годовой объем вкладываемых средств в млн. руб. на момент времени t в годах.

Найти увеличение капитала фирмы через три года.

Решение.

$$\Delta I = \int_0^3 10(1 + t) dt = (10t + 5t^2) \Big|_0^3 = \left(\frac{10t^2}{2} + \frac{5t^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 75 \text{ млн. руб.}$$

Задача 9. Заданы чистые инвестиции функцией $I(t) = 500 \sqrt{t}$ (у.е.). Требуется определить приращение капитала за 2 года.

$$\Delta K = \int_0^2 500\sqrt{t} dt = \frac{500t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{500 \cdot 2}{3} * \sqrt{8} \approx 943, 3(\text{у.е.}).$$

Задача 10. Задана функция чистых инвестиций $I(t) = 300\sqrt[3]{t}$. Определить: сколько лет потребуется, чтобы приращение капитала составила 3000.

Решение. Обозначим искомый промежуток времени $[0, T]$ и, используя формулу, получим

$$3000 = \int_0^T (300\sqrt[3]{t}) dt = \left(\frac{4 \cdot 300 \sqrt[3]{t^4}}{3} \right) \Big|_0^T = 400\sqrt[3]{T^4}.$$

$$\text{Запишем уравнение: } 3000 = 400\sqrt[3]{T^4}.$$

$$\text{Следовательно: } T^{\frac{4}{3}} = 7,5 \text{ или } T = (7,5^{\frac{3}{4}}) = 4,53.$$

Чтобы приращение капитала составило 3000, потребуется 4,53 года.

Задача 11. Стоимость имущества в млн. руб. в течение 2013 г. изменяется в соответствии с зависимостью

$$P = 250 + 50\sqrt{t},$$

где $t = 0$ на 1 января 2013 г. и $t = 1$ на 1 января 2014 г.

Вычислить величину налога на имущество фирмы за 2013 г., если коэффициент налогообложения равен 0,005.

Решение:

$$N = k\bar{P} = 0,005 \frac{1}{1} \int_0^1 (250 + 50\sqrt{t}) dt = 0,005 * (250 + 50 \int_0^1 t^{\frac{3}{2}} dt) = 0,005 * (250 + 50 \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Big|_0^1) = 0,005 * (250 + 20) = 1,35 \text{ млн. руб.}$$

3.2. Физический смысл определённого интеграла.

Задача 12. Скорость движения материальной точки задается формулой $v = 4t^3 - 2t + 1$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за первые 4 секунды от начала движения.

Решение.

$$\int_0^4 (4t^3 - 2t + 1) dt = t^4 \Big|_0^4 - t^2 \Big|_0^4 + t \Big|_0^4 = 4^4 - 4^2 + 4 = 256 - 16 + 4 = 244 \text{ (м)}$$

Ответ: 244 м.

Задача 13. Тело движется со скоростью $v = 3 + 3t^2$ м/с. Найдите путь, пройденный телом за первые 5 секунд от начала движения.

Решение.

$$\int_0^5 (3 + 3t^2) dt = 3t \Big|_0^5 + t^3 \Big|_0^5 = 3 \cdot 5 + 5^3 = 15 + 125 = 140$$

Ответ: 140 м.

Задача 14. Найдите путь пройденный телом за *десятую* секунду, зная что скорость выражается формулой $v = t^2 + 4t - 2$ м/с.

Решение.

$$\int_9^{10} (t^2 + 4t - 2) dt = \frac{t^3}{3} \Big|_9^{10} + 2t^2 \Big|_9^{10} - 2t \Big|_9^{10} = \frac{271}{3} + 38 - 2 = \frac{271}{3} + 36 = \frac{379}{3} = 126 \frac{1}{3} \text{ м.}$$

$$\frac{t^3}{3} \Big|_9^{10} = \frac{10^3}{3} - \frac{9^3}{3} = \frac{1000 - 729}{3} = \frac{271}{3}$$

$$2t^2 \Big|_9^{10} = 2 \cdot 10^2 - 2 \cdot 9^2 = 200 - 162 = 38$$

$$2t \Big|_9^{10} = 2 \cdot 10 - 2 \cdot 9 = 20 - 18 = 2$$

Задача 15. Два тела одновременно выходят из одной точки $v_1 = 5t$ м/с, $v_2 = 3t^2$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 20 секунд?

Решение.

$$S_1 = \int_0^{20} 5t dt = \frac{5t^2}{2} \Big|_0^{20} = \frac{5 \cdot 20^2}{2} = \frac{5 \cdot 400}{2} = 1000$$

$$S_2 = \int_0^{20} 3t^2 dt = t^3 \Big|_0^{20} = 20^3 = 8000$$

$$S = S_2 - S_1 = 8000 - 1000 = 7000$$

Ответ: 7000 м.

Задача 16. Найдите количество электричества, которое проходит через поперечное сечение проводника за 10 секунд, если сила тока изменяется по закону $I(t) = 4t + 1$ А.

Решение.

$$Q = \int_0^{10} (4t + 1) dt = 2t^2 \Big|_0^{10} + t \Big|_0^{10} = 2 \cdot 10^2 + 10 = 200 + 10 = 210$$

Ответ: 210 Кл.

Задача 17. Нагрузка на теплоэлектростанцию задается функцией $f(x) = 2t + 6$. Определите затраты электроэнергии в течении суток.

Решение.

$$Q = \int_0^{24} (2t + 6) dt = t^2 \Big|_0^{24} + 6t \Big|_0^{24} = 24^2 + 6 \cdot 24 = 576 + 144 = 720$$

Ответ: 720 кВт.

Задача 18.

Тело брошено вертикально вверх со скоростью, которая изменяется по закону $v = 29,4 - 9,8t$ м/с. Найдите наибольшую высоту подъёма.

Решение.

Найдём время в течении которого тело поднималось вверх. В момент наибольшего подъёма скорость равна нулю.

$$29,4 - 9,8t = 0$$

$$9,8t = 29,4$$

$$t = 3$$

Подставляем пределы интегрирования в формулу Ньютона-Лейбница.

$$h = \int_0^3 (24,9 - 9,8t) dt = 29,4t \Big|_0^3 - 4,9t^2 \Big|_0^3 = 29,4 \cdot 3 - 4,9 \cdot 3^2 = 44,1$$

Ответ: 44,1 м.

Задача 19.

Скорость движения материальной точки выражается формулой $v = 18t - 3t^2$ м/с. Найдите путь, пройденный материальной точкой от начала движения до её остановки.

Решение.

Материальная точка остановится, значит её скорость станет равной нулю. Находим пределы интегрирования.

$$18t - 3t^2 = 0$$

$$6t - t^2 = 0$$

$$t \cdot (6 - t) = 0$$

$$t = 0, \quad t = 6.$$

$$s = \int_0^6 (18t - 3t^2) dt = 9t^2 \Big|_0^6 - t^3 \Big|_0^6 = 9 \cdot 36 - 216 = 108$$

Ответ: 108 м.

Задача 20.

Какую работу совершает сила в 10 Н при растяжении пружины на 2 см?

Решение.

По закону Гука сила F , растягивающая пружину, пропорциональна растяжению пружины, т.е. $F = kx$. Используя условие, находим:

$$k = \frac{10}{0,02} = 500 \text{ (Н/м)}$$

$$F = 500x$$

$$A = \int_0^{0,02} 500x dx = \frac{500x^2}{2} \Big|_0^{0,02} = 225x^2 \Big|_0^{0,02} = 0,1$$

Ответ: 0,1 Дж.

4. Основы теории вероятностей.

4.1. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Задача 1. В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно (считайте, что клиенты заходят независимо друг от друга).

Решение.

Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Поэтому вероятность того, что все три продавца заняты равна $(0,3)^3 = 0,027$.

Ответ: 0,027.

Задача 2. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение.

Пусть A = «чайник прослужит больше года, но меньше двух лет», B = «чайник прослужит больше двух лет», C = «чайник прослужит ровно два года», тогда $A + B + C$ = «чайник прослужит больше года». События A , B и C несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Вероятность события C , состоящего в том, что чайник выйдет из строя ровно через два года — строго в тот же день, час и секунду — равна нулю.

Тогда: $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = P(A) + P(B)$

откуда, используя данные из условия, получаем $0,97 = P(A) + 0,89$. Тем самым, для искомой вероятности имеем: $P(A) = 0,97 - 0,89 = 0,08$.

Ответ: 0,08.

Задача 3. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение.

Найдем вероятность того, что неисправны оба автомата. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: $0,05 \cdot 0,05 = 0,0025$. Событие, состоящее в том, что исправен хотя бы один автомат, противоположное. Следовательно, его вероятность равна $1 - 0,0025 = 0,9975$.

Ответ: 0,9975.

Задача 4. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение.

Рассмотрим событие A = кофе закончится в первом автомате, B = кофе закончится во втором автомате.

Вероятность того, что кофе останется в первом автомате равна $1 - 0,3 = 0,7$.

Вероятность того, что кофе останется во втором автомате равна $1 - 0,3 = 0,7$.

Вероятность того, что кофе останется в первом или втором автомате равна $1 - 0,12 = 0,88$. Поскольку $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$, имеем: $0,88 = 0,7 + 0,7 - x$, откуда искомая вероятность $x = 0,52$.

Ответ: 0,9975.

Задача 5. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение.

Вероятность того, что стекло куплено на первой фабрике и оно бракованное: $0,45 \cdot 0,03 = 0,0135$. Вероятность того, что стекло куплено на второй фабрике и оно бракованное: $0,55 \cdot 0,01 = 0,0055$. Поэтому по формуле

полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна $0,0135 + 0,0055 = 0,019$.

Ответ: 0,019.

Задача 6. По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

Решение.

Вероятность того, что первый магазин не доставит товар равна $1 - 0,9 = 0,1$. Вероятность того, что второй магазин не доставит товар равна $1 - 0,8 = 0,2$. Поскольку эти события независимы, вероятность их произведения (оба магазина не доставят товар) равна произведению вероятностей этих событий: $0,1 \cdot 0,2 = 0,02$.

Ответ: 0,02.

Задача 7. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

Решение.

Ситуация, при которой батарейка будет забракована, может сложиться в результате событий:

A = батарейка действительно неисправна и забракована справедливо или B = батарейка исправна, но по ошибке забракована. Это несовместные события, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий.

Имеем: $P(A+B)=P(A)+P(B)=0,02 \cdot 0,99 + 0,98 \cdot 0,01 = 0,0198 + 0,0098 = 0,0296$

Ответ: 0,0296.

Задача 8. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность.

Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий: а) только одно стандартное; б) хотя бы одно стандартное.

Решение.

по условию $p = 0,9$ – вероятность того, что изделие стандартно.

Тогда вероятность того, что изделие нестандартно:

$$q = 1 - p = 1 - 0,9 = 0,1$$

а) По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения вероятностей

независимых событий:

$p_1 = pq + qp$ – вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

$$0,9 \times 0,1 + 0,1 \times 0,9 = 0,09 + 0,09 = 0,18$$

б) По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$0,1 \times 0,1 = 0,01$$

$q^* = qq$ – вероятность того, оба изделия нестандартны.

Найдём вероятность противоположного события:

$p^* = 1 - q^*$ – вероятность того, что из двух проверенных изделий хотя бы одно стандартное.

$$p^* = 1 - 0,01 = 0,99$$

Ответ: а) 0,18 б) 0,99.

Задача 9. Изделие, выпускаемое предприятием, состоит из трех основных частей, количество бракованных среди которых составляет 6% , 14% , 13%. Изделие признается непригодным и заменяется бесплатно, если хотя бы одна из его частей имеет брак. Оценить затраты на замену изделия в случае брака. Стоимость одного изделия 500 руб.

Решение.

Из условия следует, что

$q_1 = 0,06$, $q_2 = 0,14$, $q_3 = 0,13$ – вероятности того, что соответствующие части изделия будут бракованными.

Найдем

p_1, p_2, p_3 – вероятности того, что соответствующие части изделия будут качественными.

$$p_1 = 1 - q_1 = 1 - 0,06 = 0,94;$$

$$p_2 = 1 - q_2 = 1 - 0,14 = 0,86;$$

$$p_3 = 1 - q_3 = 1 - 0,13 = 0,87.$$

Рассмотрим события:

A – изделие будет качественным (все три части изделия качественные);

A' – изделие будет непригодным (хотя бы одна из частей изделия бракована).

События A и A' являются противоположными, поэтому:

$$P(A) + P(A') = 1.$$

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A) = p_1 \times p_2 \times p_3 = 0,94 \times 0,86 \times 0,87 = 0,703308 .$$

Таким образом,

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0,703308 = 0,296692$$

Затраты на замену изделия:

$$500 \times 0,296692 = 148,346 \text{ руб.}$$

Ответ: 148,346 руб.

Задача 10. В городе 4 коммерческих банка, оценка надежности которых равны 0,8, 0,92, 0,95, 0,98 соответственно. Найти вероятность того, что в течение некоторого промежутка времени обанкротится хотя бы один.

Решение.

По условию

$p_1 = 0,8$, $p_2 = 0,92$, $p_3 = 0,95$, $p_4 = 0,98$ – вероятности того, что соответствующие банки не обанкротятся.

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$p = p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4 = 0,8 \times 0,92 \times 0,95 \times 0,98 = 0,685216$ – вероятность того, что в течение некоторого промежутка времени не обанкротится ни один банк.

Найдём вероятность противоположного события:

$q = 1 - p = 1 - 0,685216 = 0,314784$ – вероятность того, что в течение некоторого промежутка времени обанкротится хотя бы один банк.

Ответ: 0,314784

4.2. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Задача 11.

Число грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых, как 3 : 2. Вероятность, что случайно проезжающая грузовая машина будет заправляться, равна 0, 1, для легковой машины эта вероятность равна 0, 2. К бензоколонке подъехала машина. Найти вероятность, что это грузовой автомобиль.

Р е ш е н и е.

Обозначим через В событие, состоящее в том, что машина будет заправляться; A_1 — проезжающая машина грузовая, A_2 — проезжающая машина легковая. Найдём

$$P(A_1) = 3/5, P(A_2) = 2/5, P(B|A_1) = 0, 1, P(B|A_2) = 0, 2.$$

Следовательно,

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) = 0, 14,$$

$$P(A_1|B) = P(B|A_1)P(A_1)/P(B) = 0, 43.$$

Ответ: 0,43

Задача 12.

В монтажном цехе к устройству присоединяется электродвигатель. Электродвигатели поставляются тремя заводами-изготовителями. На складе имеются электродвигатели названных заводов соответственно в количестве 19, 6 и 11 шт., которые могут безотказно работать до конца гарантийного срока соответственно с вероятностями 0,85, 0,76 и 0,71. Рабочий берет случайно один двигатель и монтирует его к устройству. Найти вероятности того, что

смонтированный и работающий безотказно до конца гарантийного срока электродвигатель поставлен соответственно первым, вторым или третьим заводом.

Р е ш е н и е.

Рассмотрим следующие события: H — электродвигатель работает безотказно до конца гарантийного срока; A_i — рабочий возьмет двигатель из продукции i -го завода. Понятно, что события A_1, A_2, A_3 образуют полную группу, их вероятности

$$P(A_1) = 19/36 = 0,528,$$

$$P(A_2) = 6/36 = 0,167,$$

$$P(A_3) = 11/36 = 0,306.$$

Условные вероятности H заданы по условию задачи:

$$P(H|A_1) = 0,85,$$

$$P(H|A_2) = 0,76,$$

$$P(H|A_3) = 0,71.$$

По формуле полной вероятности найдем

$$P(H) = 19/36 \cdot 0,85 + 6/36 \cdot 0,76 + 11/36 \cdot 0,71 = 0,792.$$

По формуле Байеса найдем условные вероятности A_1, A_2, A_3 :

$$P(A_1|H) = P(H|A_1)P(A_1)/P(H) = 0,528 \cdot 0,85/0,792 = 0,566;$$

$$P(A_2|H) = 0,167 \cdot 0,76/0,792 = 0,160;$$

$$P(A_3|H) = 0,306 \cdot 0,71/0,792 = 0,274.$$

Задача 13.

Детали, изготавливаемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0,55, а ко второму — 0,45. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым — 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение.

Ответ:

Задача 14.

На склад поступили электрические лампы трех партий. Известно, что в первой партии, состоящей из 400 шт., содержится 1 % нестандартных, во второй, состоящей из 500 шт., — 2 % и в третьей, состоящей из 100 шт., — 4 % нестандартных. Со склада лампы поступили в магазин и здесь оказались расположенными случайным образом. Определить вероятность того, что покупатель, берущий одну лампу, купит нестандартную.

Решение.

Рассмотрим события: A — купленная лампа оказалась нестандартной; гипотезы H_1, H_2, H_3 , — лампа соответственно из 1, 2 и 3 партии. По условию задачи

$$P(H_1) = 0,4; P(H_2) = 0,5; P(H_3) = 0,1;$$
$$P(A|H_1) = 0,01; P(A|H_2) = 0,02; P(A|H_3) = 0,04;$$

По формуле полной вероятности получаем:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3)$$
$$= 0,4 \cdot 0,01 + 0,5 \cdot 0,02 + 0,1 \cdot 0,04 = 0,018.$$

Ответ: 0,018.

Задача 15.

При проверке качества зерен пшеницы было установлено, что все зерна могут быть разделены на 4 группы. К зернам первой группы принадлежит 96 %, ко второй — 2 %, к третьей — 1 % и к четвертой — 1 % всех зерен. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен, для семян первой группы равна 0,5, для семян второй группы — 0,2, для семян третьей группы — 0,18 и для семян четвертой группы — 0,02. Определить вероятность того, что из взятого наудачу зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен.

Решение.

Рассмотрим события: A — из взятого зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зёрен; гипотезы H_1, H_2, H_3, H_4 — зерно пшеницы принадлежит соответственно к 1, 2, 3 и 4 виду. По условию задачи

$$P(H_1) = 0,96; P(H_2) = 0,02; P(H_3) = 0,01; P(H_4) = 0,01$$

$$P(A|H_1) = 0,5; P(A|H_2) = 0,2; P(A|H_3) = 0,18; P(A|H_4) = 0,02$$

По формуле полной вероятности получаем:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) + P(H_4) \cdot P(A|H_4) \\ &= 0,96 \cdot 0,5 + 0,02 \cdot 0,2 + 0,01 \cdot 0,18 + 0,01 \cdot 0,02 = 0,486. \end{aligned}$$

Ответ: 0,486.

Задача 16.

Компания по страхованию автомобилей разделяет водителей по трём классам: класс А (мало рискует), класс В (рискует средне), класс С (рискует сильно). Компания предполагает, что из всех водителей, застрахованных у неё, 25% принадлежат классу А, 55% – классу В, 20% – классу С. Вероятность того, что в течение года водитель класса А попадёт хотя бы в одну автокатастрофу, равна 0,02; для водителя класса В эта вероятность равна 0,05, а для водителя класса С – 0,2. Господин Джеймс страхует свою машину у этой компании и в течение года попадает в автокатастрофу. Какова вероятность того, что он относится к классу А?

Решение.

Рассмотрим события: А — Джеймс страхует машину и в течение года попадает в автокатастрофу; гипотезы H_1, H_2, H_3 — водитель застрахованный машину относится соответственно к классу А, В, С. По условию задачи

$$\begin{aligned} P(H_1) &= 0,25; P(H_2) = 0,55; P(H_3) = 0,2 \\ P(A|H_1) &= 0,02; P(A|H_2) = 0,05; P(A|H_3) = 0,2 \end{aligned}$$

По формуле Байеса получаем:

$$\begin{aligned} P(H_1|A) &= \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3)} \\ P(H_1|A) &= \frac{0,25 \cdot 0,02}{0,25 \cdot 0,02 + 0,55 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 0,2} = \frac{0,005}{0,0725} = 0,069 \end{aligned}$$

Ответ: 0,069.

Задача 17.

На склад поступило 3 партии изделий: первая – 1500 штук, вторая – 2500 штук, третья – 3000 штук. Средний процент нестандартных изделий в первой партии 10%, во второй – 8%, в третьей – 5%. Наудачу взятое со склада изделие

оказалось нестандартным. Найти вероятность того, что оно: а) из первой партии, б) из второй партии, в) из третьей партии.

Решение.

Рассмотрим события: А — взятое со склада изделие оказалось нестандартным; гипотезы H_1, H_2, H_3 — изделие взято из 1, 2 и 3 партии соответственно. По условию задачи

$$P(H_1) = \frac{1500}{7000}; P(H_2) = \frac{2500}{7000}; P(H_3) = \frac{3000}{7000}$$

$$P(A|H_1) = 0,1; P(A|H_2) = 0,08; P(A|H_3) = 0,05$$

а) По формуле Байеса получаем:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3)}$$

$$P(H_1|A) = \frac{\frac{15}{70} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{15}{70} \cdot \frac{1}{10} + \frac{25}{70} \cdot \frac{8}{100} + \frac{30}{70} \cdot \frac{5}{100}} = \frac{\frac{3}{140}}{\frac{10}{140}} = 0,3$$

б) По формуле Байеса получаем:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3)}$$

$$P(H_2|A) = \frac{\frac{25}{70} \cdot \frac{8}{100}}{\frac{15}{70} \cdot \frac{1}{10} + \frac{25}{70} \cdot \frac{8}{100} + \frac{30}{70} \cdot \frac{5}{100}} = \frac{\frac{2}{70}}{\frac{10}{140}} = 0,4$$

в) По формуле Байеса получаем:

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A|H_3)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3)}$$

$$P(H_3|A) = \frac{\frac{30}{70} \cdot \frac{5}{100}}{\frac{15}{70} \cdot \frac{1}{10} + \frac{25}{70} \cdot \frac{8}{100} + \frac{30}{70} \cdot \frac{5}{100}} = \frac{\frac{3}{140}}{\frac{10}{140}} = 0,3$$

Ответ: а) 0,3 б) 0,4 в) 0,3

Задача 18.

На предприятии, изготавливающем дверные замки, первый цех производит 25%, второй 35%, третий 40% всех замков. Брак составляет соответственно 5%,

4% и 2%. Найти вероятность того, что случайно выбранный замок будет дефектным.

Решение.

Рассмотрим события: A — выбранный замок оказался дефектным; гипотезы H_1, H_2, H_3 , — дверной замок соответственно из 1, 2 и 3 цеха. По условию задачи

$$P(H_1) = 0,25; P(H_2) = 0,35; P(H_3) = 0,4;$$
$$P(A|H_1) = 0,05; P(A|H_2) = 0,04; P(A|H_3) = 0,02;$$

По формуле полной вероятности получаем:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3)$$
$$= 0,25 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,04 + 0,4 \cdot 0,02 = 0,0345.$$

Ответ: 0,0345.

Задача 19.

Прибор, установленный на борту самолета, может работать в двух режимах: в условиях нормального крейсерского полёта и в условиях перегрузки при взлете и посадке. Крейсерский режим полета составляет 80% всего времени полёта, условия перегрузки – 20%. Вероятность выхода прибора из строя за время полета в нормальном режиме равна 0,1, в условиях перегрузки – 0,4. Найти вероятность того, что прибор не откажет в течение всего полёта.

Решение.

Рассмотрим события: A — прибор не откажет в течение всего полёта; гипотезы H_1, H_2 — прибор работает в условиях нормального крейсерского полёта и в условиях перегрузки соответственно. По условию задачи

$$P(H_1) = 0,8; P(H_2) = 0,2;$$
$$P(A|H_1) = 1 - 0,1 = 0,9; P(A|H_2) = 1 - 0,4 = 0,6;$$

По формуле полной вероятности получаем:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) = 0,8 \cdot 0,9 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,84.$$

Ответ: 0,84

Задача 20.

Изделие проверяется на стандартность одним из 2-х товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу, равна 0,55, а ко

второму – 0,45. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,87, а вторым – 0,98. Стандартное изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что его проверял второй товаровед.

Решение.

Рассмотрим события: А — изделие было признано стандартным; гипотезы H_1, H_2 — изделие проверял 1 и 2 товаровед соответственно. По условию задачи

$$P(H_1) = 0,55; P(H_2) = 0,45;$$

$$P(A|H_1) = 0,87; P(A|H_2) = 0,98;$$

По формуле Байеса получаем:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2)}$$

$$P(H_2|A) = \frac{0,45 \cdot 0,98}{0,55 \cdot 0,87 + 0,45 \cdot 0,98} = 0,48$$

Ответ: 0,48.

Задача 21.

Страховая компания разделяет застрахованных по классам риска: 1 класс – малый риск, 2 класс – средний, 3 класс – большой риск. Среди этих клиентов 60 % - первого класса риска, 30 % - второго и 10 % - третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска, равна 0,02; для второго – 0,04; для третьего – 0,09. Какова вероятность того, что получит вознаграждение за период страхования клиент, относящийся к классу малого риска.

Решение.

Рассмотрим события: А — необходимо выплатить страховое вознаграждение; гипотезы H_1, H_2, H_3 — застрахованный относится к классу 1, 2 и 3 риска соответственно. По условию задачи

$$P(H_1) = 0,6; P(H_2) = 0,3; P(H_3) = 0,1$$

$$P(A|H_1) = 0,02; P(A|H_2) = 0,04; P(A|H_3) = 0,09$$

По формуле Байеса получаем:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3)}$$

$$P(H_1|A) = \frac{0,6 \cdot 0,02}{0,6 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,1 \cdot 0,09} = 0,36$$

Ответ: 0,36.

Задача 22.

Вся продукция предприятия проверяется двумя контролерами, причем первый проверяет 55 % изделий, второй – остальные. Вероятность того, что первый контролер пропустит нестандартное изделие 0,01, второй – 0,02. Взятое наудачу изделие, маркированное как стандартное, оказалось нестандартным. Вероятнее всего кем оно проверялось?

Решение.

Рассмотрим события: А — изделие оказалось нестандартным; гипотезы H_1 , H_2 — изделие проверял 1 и 2 контроллер соответственно. По условию задачи

$$P(H_1) = 0,55; P(H_2) = 0,45;$$

$$P(A|H_1) = 0,01; P(A|H_2) = 0,02;$$

По формуле Байеса находим вероятности того, что изделие оказалось нестандартным, проверил 1 и 2 контроллер соответственно:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2)}$$

$$P(H_1|A) = \frac{0,55 \cdot 0,01}{0,55 \cdot 0,01 + 0,45 \cdot 0,02} = 0,38$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2)}$$

$$P(H_2|A) = \frac{0,45 \cdot 0,02}{0,55 \cdot 0,01 + 0,45 \cdot 0,02} = 0,62$$

Ответ: так как $P(H_2|A) > P(H_1|A)$, то вероятнее всего изделие было проверено вторым контроллером.

Задача 23.

В магазин бытовой техники поступила партия холодильников трёх торговых марок: «Дед Мороз», «Снегурочка» и «Северный олень». В поступившей партии 10% холодильников «Дед Мороз», 40% холодильников «Снегурочка», остальные – «Северный олень». Известно, что холодильники данных торговых марок не требуют ремонта в течение гарантийного срока, соответственно, в 98%, 88% и 92% случаях. Найти вероятность того, что

случайно выбранный из партии холодильник не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

Решение.

Рассмотрим события: A — холодильник не потребует ремонта; гипотезы H_1, H_2, H_3 , — холодильник торговой марки «Дед Мороз», «Снегурочка» и «Северный олень» соответственно. По условию задачи

$$P(H_1) = 0,1; P(H_2) = 0,4; P(H_3) = 0,5;$$
$$P(A|H_1) = 0,98; P(A|H_2) = 0,88; P(A|H_3) = 0,92;$$

По формуле полной вероятности получаем:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3)$$
$$= 0,1 \cdot 0,98 + 0,4 \cdot 0,88 + 0,5 \cdot 0,92 = 0,91.$$

Ответ: 0,91.

Задача 24.

В город сметану поставляют три ОАО в соотношении 5:8:7. Среди продукции Сергеевского ОАО 20 % сметаны 90 %, среди продукции Малаховского ОАО 20 % сметаны 85 %, среди продукции Шумаковского ОАО 20 % сметаны 75 %. Найти вероятность того, что купленная сметана, имеющая жирность 20 % Малаховского ОАО.

Решение.

Рассмотрим события: A — сметана имеет жирность 20%; гипотезы H_1, H_2, H_3 , — сметана Сергеевского ОАО, Малаховского ОАО и Шумаковского ОАО соответственно. По условию задачи

$$P(H_1) = \frac{5}{20}; P(H_2) = \frac{8}{20}; P(H_3) = \frac{7}{20};$$
$$P(A|H_1) = 0,9; P(A|H_2) = 0,85; P(A|H_3) = 0,75;$$

По формуле Байеса получаем:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3)}$$
$$P(H_2|A) = \frac{\frac{8}{20} \cdot \frac{85}{100}}{\frac{5}{20} \cdot \frac{9}{10} + \frac{8}{20} \cdot \frac{85}{100} + \frac{7}{20} \cdot \frac{75}{100}} = \frac{\frac{17}{50}}{\frac{331}{400}} = 0,41$$

Ответ: 0,41.

Задача 25.

Фирма имеет три источника поставки комплектующих – фирмы А, В, С. На долю фирмы А приходится 50% общего объема поставок, В – 30% и С – 20%. Из практики известно, что среди поставляемых фирмой А деталей 10% бракованных, фирмой В – 5% и фирмой С – 6%. Какова вероятность, что взятая наугад деталь окажется годной?

Решение.

Рассмотрим события: А — взятая деталь окажется годной; гипотезы H_1 , H_2 , H_3 — комплектующие поступили с фирмы А, В и С соответственно. По условию задачи

$$P(H_1) = 0,5; P(H_2) = 0,3; P(H_3) = 0,2$$

$$P(A|H_1) = 1 - 0,1 = 0,9; P(A|H_2) = 1 - 0,05 = 0,95; P(A|H_3) = 1 - 0,06 = 0,94.$$

По формуле полной вероятности получаем:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) \\ &= 0,5 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 0,94 = 0,923. \end{aligned}$$

Ответ: 0,923.

Задача 26.

С первого станка на сборку поступает 40% изготовленных деталей; со второго – 30%, а с третьего – 30%. Вероятность изготовления бракованной детали для каждого станка равна соответственно 0,01; 0,03; 0,05. Найти вероятность того, что взятая деталь оказалась бракованной.

Решение.

Рассмотрим события: А — деталь бракована; гипотезы H_1 , H_2 , H_3 — деталь поступила на сборку с 1, 2 и 3 станка соответственно.

По условию задачи

$$P(H_1) = 0,4; P(H_2) = 0,3; P(H_3) = 0,3$$

$$P(A|H_1) = 0,01; P(A|H_2) = 0,03; P(A|H_3) = 0,05.$$

По формуле полной вероятности получаем:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) \\ &= 0,4 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,05 = 0,028. \end{aligned}$$

Ответ: 0,028.

Задача 27.

Однотипные детали изготавливаются на трех прессах: на первом - 40% всех деталей, на втором 25%, остальные на третьем прессе. Брак в продукции прессов составляет 0,5% для первого пресса, 1% для второго, 2% для третьего пресса. Найти вероятность того, что наудачу выбранная и оказавшаяся бракованной деталь изготовлена на втором прессе.

Решение.

Рассмотрим события: A — изготовленная деталь бракована; гипотезы H_1 , H_2 , H_3 , — деталь изготовлена на 1, 2 и 3 прессе соответственно. По условию задачи

$$P(H_1) = 0,4; P(H_2) = 0,25; P(H_3) = 0,35;$$
$$P(A|H_1) = 0,005; P(A|H_2) = 0,01; P(A|H_3) = 0,02;$$

По формуле Байеса получаем:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3)}$$
$$P(H_2|A) = \frac{0,25 \cdot 0,01}{0,4 \cdot 0,005 + 0,25 \cdot 0,01 + 0,35 \cdot 0,02} = \frac{0,0025}{0,0115} = 0,22$$

Ответ: 0,22.

Задача 28.

На склад поступает продукция трёх фабрик, причём продукция первой фабрики составляет 20%, второй – 46%, третьей – 34 %. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3%, для второй – 2%, для третьей – 1%. Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие произведено на первой фабрике, если оно оказалось нестандартным.

Решение.

Рассмотрим события: A — изделие оказалось нестандартным; гипотезы H_1 , H_2 , H_3 — изделие поступило на склад соответственно с первой, второй, третьей фабрики. По условию задачи

$$P(H_1) = 0,2; P(H_2) = 0,46; P(H_3) = \frac{50}{100} = 0,34$$
$$P(A|H_1) = 0,03; P(A|H_2) = 0,02; P(A|H_3) = 0,01$$

По формуле полной вероятности получаем:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) \\ &= 0,2 \cdot 0,03 + 0,46 \cdot 0,02 + 0,34 \cdot 0,01 = 0,0186. \end{aligned}$$

Ответ: 0,0186.

Задача 29.

Электролампы изготавливаются на трёх заводах, причём первый производит 45% общего количества, второй – 40%, третий – 15%. Продукция первого завода содержит 70% стандартных ламп, второго – 80%, третьего – 81%. Какова вероятность того, что купленная в магазине лампа окажется стандартной?

Решение.

Рассмотрим события: A — купленная лампа оказалась стандартной; гипотезы H_1, H_2, H_3 — лампа изготовлена соответственно на первом, втором, третьем заводах. По условию задачи

$$\begin{aligned} P(H_1) &= 45\% = 0,45; P(H_2) = 40\% = 0,4; P(H_3) = 15\% = 0,15 \\ P(A|H_1) &= 0,7; P(A|H_2) = 0,8; P(A|H_3) = 0,81 \end{aligned}$$

По формуле полной вероятности получаем:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) \\ &= 0,45 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,8 + 0,15 \cdot 0,81 = 0,7565. \end{aligned}$$

Ответ: 0,7565.

Задача 30.

В продажу поступают телевизоры трех заводов: 30% с первого завода, 20% — со второго, 50% — с третьего. Продукция первого завода содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, второго — 10% , третьего — 5%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор?

Решение.

Рассмотрим события: A — приобретен исправный телевизор; гипотезы H_1, H_2, H_3 — телевизор поступил в продажу соответственно с первого, второго, третьего завода. По условию задачи

$$P(H_1) = \frac{30}{100} = 0,3; P(H_2) = \frac{20}{100} = 0,2; P(H_3) = \frac{50}{100} = 0,5$$

$$P(A|H_1) = \frac{80}{100} = 0,8; P(A|H_2) = \frac{90}{100} = 0,9; P(A|H_3) = \frac{95}{100} = 0,95$$

По формуле полной вероятности получаем:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) = 0,3 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,95 \\ = 0,895.$$

Ответ: 0,895.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Практико-ориентированное обучение направленно на развитие познавательных потребностей, функционирования мышления, организацию поиска новых знаний, повышению эффективности образовательного процесса, формирование практического опыта и использования его при решении жизненно важных задач и проблем. Для лучшего развития практико-ориентированного подхода в обучении математике самое эффективное средство – прикладные задачи, задачи, связанные с окружающей действительностью. Применение в обучении практико-ориентированных задач способствует лучшему усвоению у студентов полученной информации, потому что задачи основаны на действительности, в них отражены конкретные действия и события, которые могут происходить в повседневной жизни, присутствуют подлинные условия. Они способствуют творческому развитию личности, развитию мышления, интеллектуальности, воображения, формированию общих и профессиональных компетенций.

Поэтому необходимо составлять такие задачи и определять их место на занятиях математики. Решение задач с практическим содержанием – одна из форм работы по осуществлению профессиональной направленности преподавания математики в средних профессиональных учреждениях.

Практика показала, что систематическая работа по решению и конструированию практико-ориентированных задач и использование разнообразных приёмов даёт положительные результаты. Изучение сложного математического материала становится более интересным, обучающиеся находят практическое применение изучаемых тем в своей профессиональной деятельности.

В заданиях показывается обучающимся значимость математических знаний для выбранной специальности, что ориентирует их на новый, более высокий уровень изучения математики. Систематическое использование на учебных занятиях задач профессиональной направленности является связующей

нитью между теорией и практической деятельностью, что способствует более глубокому освоению профессии, способствует развитию интереса к математике как к науке и как к профессионально значимой дисциплине, показывает прикладной характер математики. Обучающиеся понимают, что математика – важный предмет в СПО.

Список используемых источников

1. Приказ Минобрнауки России от 15.05.2014 N539 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 38.02.04 Коммерция (по отраслям)". <https://www.rea.ru/ru/org/branches/smolensk/Documents/st-spo-38.02.04-539.pdf>
2. Приказ Минобрнауки России от 28.07.2014 N835 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 38.02.05 Товароведение и экспертиза качества потребительских товаров". <https://www.rea.ru/ru/org/colleges/МТКР/Documents/ФГОС/ФГОС-38.02.05%20Товароведение%20и%20экспертиза%20качества%20потребительских%20товаров.pdf>
3. Приказ Минобрнауки России от 05.02.2018 N 69 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)". https://www.rea.ru/ru/org/managements/Upravlenie-attestacii-i-podgotovki-nauchnykh-kadrov/Documents/ФГОС%20ВО/Standart_38.02.01_EBU_2018.pdf
4. Приказ Минобрнауки России от 18.04.2014 N 347 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 15.02.05 Техническая эксплуатация оборудования в торговле и общественном питании". <http://мткп.пф/wa-data/public/site/ФГОС/ФГОС-15.02.05%20Техническая%20эксплуатация%20оборудования%20в%20торговле%20и%20общественном%20питании.pdf>
5. Распоряжение Правительства РФ от 24.12.2013 N 2506-р (ред. от 08.10.2020) <Об утверждении Концепции развития математического образования в

Российской Федерации> <https://sudact.ru/law/rasporiazhenie-pravitelstva-rf-ot-24122013-n-2506-r/>

6. Вентцель Е.С. Прикладные задачи теории вероятностей [Текст]: учебник / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Радио и связь, 1983. – 416с.
7. Высшая математика для экономистов / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ, 2006. 479 с.
8. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики [Текст]: учебное пособие для вузов / В.Е. Гмурман. – 5-е изд. стер. - М.: Высшая школа, 2000. - 400с.
9. Гуткин Л.И. Сборник задач по математике с практическим содержанием (для техникумов) / Л.И. Гуткин. - М.: Высшая школа, 1968. – 109с.
10. Зеленцов Б.П., Кулагина Н.А. Линейная алгебра: Практикум. Новосибирск: Сибирская академия банковского дела и финансов, 2014.-59 с.
11. Зубков А.И. Сборник задач по теории вероятностей [Текст]: учебное пособие для вузов / А.И. Зубков, Б.А. Севастьянов, В.П. Чистяков. - М.: Наука, 1989. – 320с.
12. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 280с
13. Карасев А.И. Руководство к решению задач с экономическим содержанием по курсу высшей математики: учебное пособие. / А.И. Карасев, Н.Ш. Кремер. - М.: ВЗФЭИ, 1989. – 100 с.
14. Колемаев В.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебник для вузов / В.А. Колемаев, В.Н. Калинина. - 2-е изд. перераб. и доп. - М.: ЮНИТИ, 2003. – 352с.
15. Колемаев В.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебник / В.А. Колемаев, О.В. Староверов, В.Б. Турундаевский. - М.: Высшая школа, 1991. - 236с.
16. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. Издательство «Дело», 2001. – 688с.

- 17.Красс М.С. Математика для экономического бакалавриата. Учеб. для вузов по направлению «Экономика» / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: Дело, 2005. – 574 с.
- 18.Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебник / Н.Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 543с.
- 19.Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 471 с. – ISBN 5-238-00030-8
- 20.Кремер Н.Ш. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, [и др.] – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 423 с. – ISBN 5-238-00459-1
- 21.Малугин В. А., Рощина Я. А. Линейная алгебра для экономистов: учебник, практикум и сборник задач для академического бакалавриата — М.: Издательство Юрайт, 2015. (Серия: Бакалавр. Академический курс)
- 22.Новикова Т.В. Элементы линейной алгебры и линейного программирования в экономике: Методическая разработка. Издательство «Томинтех», 2013.—53 с.
- 23.Практикум по высшей математике для экономистов / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ, 2005. 423 с.
- 24.Соловейчик И.Л., Лисичкин В.Т. Математика в задачах с решениями: учебное пособие — СПб.: Лань, 2014.